

# 浅谈量子力学中的福克表象

王浩铭 21110588

2023 年 11 月 20 日

## 1 谐振子

谐振子是量子力学中动力学系统的一个简单而有价值的例子. 这个例子对普遍物理很重要, 因为它是辐射理论的基础. 描述这个系统所需的动力学变量只有坐标  $q$  和它的共轭动量  $p$ . 经典力学中的哈密顿量是

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2), \quad (1)$$

其中  $m$  是振动粒子的质量,  $\omega$  等于  $2\pi$  乘上频率.

在薛定谔表象中, 态矢  $|\Phi(t)\rangle^S$  代表随时间演化的物理态, 而希尔伯特空间上的算符  $O^S$  不依赖于时间. 如果系统的哈密顿量  $H$  不含时间, 则  $|\Phi(t)\rangle^S$  与  $t=0$  时刻的态矢  $|\Phi(0)\rangle^S$  通过么正变换  $e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$  联系起来,

$$|\Phi(t)\rangle^S = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\Phi(0)\rangle^S, \quad (2)$$

于是

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Phi(t)\rangle^S = H |\Phi(t)\rangle^S, \quad (3)$$

这就是薛定谔方程, 而 (2) 式其实是薛定谔方程 (3) 式的解.

在海森堡表象中, 不随时间演化的态矢  $|\Phi\rangle^H$  定义为

$$|\Phi\rangle^H = e^{\frac{iHt}{\hbar}} |\Phi(t)\rangle^S = |\Phi(0)\rangle^S, \quad (4)$$

而算符  $O^H(t)$  依赖于时间, 与  $O^S$  通过一个含时的相似变换联系起来,

$$O^H(t) = e^{\frac{iHt}{\hbar}} O^S e^{-\frac{iHt}{\hbar}}, \quad (5)$$

由于  $[H, H] = 0$ , 有

$$e^{\frac{iHt}{\hbar}} H e^{-\frac{iHt}{\hbar}} = H e^{\frac{iHt}{\hbar}} e^{-\frac{iHt}{\hbar}} = H,$$

故哈密顿量  $H$  在这两种表象中是相同的,  $H^H = H^S = H$ . 由 (4) 和 (5)

$$\langle \Phi |^H O^H(t) | \Phi \rangle^H = \langle \Phi |^H e^{\frac{iHt}{\hbar}} O^S e^{-\frac{iHt}{\hbar}} | \Phi \rangle^H = \langle \Phi(t) |^S O^S | \Phi(t) \rangle^S.$$

可知, 两种表象中力学量在态上的期待值相同, 因而两种表象描述相同的物理. 此外, 可以推出

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} O^H(t) = [O^H(t), H], \quad (6)$$

即海森堡表象中的含时算符  $O^H(t)$  满足海森堡运动方程 (6) 式.

于是我们假定量子力学中的哈密顿量完全相同. 哈密顿量 (1) 和量子条件

$$qp - pq = i\hbar$$

完全确定了振子的运动. 该系统的海森堡运动方程是

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_t &= [q_t, H] = p_t/m \\ \dot{p}_t &= [p_t, H] = -m\omega^2 q_t \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

为方便起见, 引入无量纲的复数动力学变量

$$\eta = (2m\hbar\omega)^{-\frac{1}{2}}(p + im\omega q).$$

运动方程 (7) 给出

$$\dot{\eta}_t = (2m\hbar\omega)^{-\frac{1}{2}}(-m\omega^2 q_t + i\omega p_t) = i\omega \eta_t.$$

上式积分得到

$$\eta_t = \eta_0 e^{i\omega t}, \quad (8)$$

这里的  $\eta_0$  是独立于  $t$  的线性算符, 等于  $t = 0$  时的  $\eta_t$ . 上面的各个方程与经典理论中的一样.

我们可以用  $\eta$  及其共轭复量  $\bar{\eta}$  来表示  $q$  和  $p$ , 并完全用  $\eta$  和  $\bar{\eta}$  来讨论问题. 我们有

$$\hbar\omega\eta\bar{\eta} = (2m)^{-1}[p^2 + m^2\omega^2 q^2 + im\omega(qp - pq)] = H - \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (9)$$

同样地,

$$\hbar\omega\bar{\eta}\eta = H + \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (10)$$

因而,

$$\bar{\eta}\eta - \eta\bar{\eta} = 1. \quad (11)$$

方程 (9) 和 (10) 把  $H$  表示成  $\eta$  和  $\bar{\eta}$  的函数, 方程 (11) 给出了  $\eta$  和  $\bar{\eta}$  的对易关系. 由式 (9) 得

$$\hbar\omega\bar{\eta}\eta\bar{\eta} = \bar{\eta}H - \frac{1}{2}\hbar\omega\bar{\eta},$$

由式 (10) 得

$$\hbar\omega\bar{\eta}\eta\bar{\eta} = H\bar{\eta} - \frac{1}{2}\hbar\omega\bar{\eta}.$$

因此

$$\bar{\eta}H - H\bar{\eta} = \hbar\omega\bar{\eta}. \quad (12)$$

同时, 式 (11) 可以推出, 对任意的正整数  $n$ ,

$$\bar{\eta}\eta^n - \eta^n\bar{\eta} = n\eta^{n-1}. \quad (13)$$

令  $H'$  是  $H$  的一个本征值, 而  $|H'\rangle$  是属于该本征值的本征右矢. 由式 (9) 得

$$\hbar\omega\langle H'|\eta\bar{\eta}|H'\rangle = \langle H'|H - \frac{1}{2}\hbar\omega|H'\rangle = (H' - \frac{1}{2}\hbar\omega)\langle H'|H'\rangle.$$

由于  $\langle H'|\eta\bar{\eta}|H'\rangle$  是右矢  $\bar{\eta}|H'\rangle$  长度的平方, 因此

$$\langle H'|\eta\bar{\eta}|H'\rangle \geq 0,$$

只有当  $\bar{\eta}|H'\rangle = 0$  时, 等号才成立. 而且  $\langle H'|H'\rangle > 0$ . 因此

$$H' \geq \frac{1}{2}\hbar\omega, \quad (14)$$

只有当  $\bar{\eta}|H'\rangle = 0$  时, 等号才成立.

由式 (12) 得

$$H\bar{\eta}|H'\rangle = (\bar{\eta}H - \hbar\omega\bar{\eta})|H'\rangle = (H' - \hbar\omega)\bar{\eta}|H'\rangle. \quad (15)$$

如果  $H' \neq \frac{1}{2}\hbar\omega$ , 则  $\bar{\eta}|H'\rangle$  不为零, 那么按照 (15),  $\bar{\eta}|H'\rangle$  是  $H$  的本征右矢, 属于本征值  $H' - \hbar\omega$ . 因此, 只要  $H'$  是  $H$  的任意本征值, 且不等于  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ , 则  $H' - \hbar\omega$  就是  $H$  的另一本征值. 按照这个方法延续下去, 得到一系列本征值, 即  $H'$ ,  $H' - \hbar\omega$ ,  $H' - 2\hbar\omega$ ,  $H' - 3\hbar\omega, \dots$ , 该系列不能无限地延伸下去, 否则会得到与式 (15) 矛盾

的本征值, 因而只能中断于  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ . 另外, 从式 (12) 的共轭复数方程可得

$$H\eta|H'\rangle = (\eta H + \hbar\omega\eta)|H'\rangle = (H' + \hbar\omega)\eta|H'\rangle,$$

此式表明,  $H' + \hbar\omega$  是  $H$  的另一本征值,  $\eta|H'\rangle$  是属于它的本征右矢, 除非  $\eta|H'\rangle = 0$ , 而  $\eta|H'\rangle = 0$  的例外可以排除, 因为它会导致

$$0 = \hbar\omega\bar{\eta}\eta|H'\rangle = (H + \frac{1}{2}\hbar\omega)|H'\rangle = (H' + \frac{1}{2}\hbar\omega)|H'\rangle,$$

这与式 (14) 矛盾. 因此,  $H' + \hbar\omega$  总是  $H$  的另一个本征值, 而  $H' + 2\hbar\omega$ ,  $H' + 3\hbar\omega$  等等都是. 于是,  $H$  的本征值是一系列的数, 即

$$\frac{1}{2}\hbar\omega, \quad \frac{3}{2}\hbar\omega, \quad \frac{5}{2}\hbar\omega, \quad \frac{7}{2}\hbar\omega, \quad \dots \quad (16)$$

以至无穷, 这些都是谐振子可能的能量取值.

令  $|0\rangle$  是  $H$  的本征右矢, 属于最低的本征值  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ , 所以

$$\bar{\eta}|0\rangle = 0, \quad (17)$$

并形成一系列的右矢

$$|0\rangle, \quad \eta|0\rangle, \quad \eta^2|0\rangle, \quad \eta^3|0\rangle, \quad \dots \quad (18)$$

这些右矢全是  $H$  的本征右矢, 分别属于式 (16) 中的一系列本征值. 由式 (13) 和 (17) 可知, 对任意的非负整数  $n$ , 有

$$\bar{\eta}\eta^n|0\rangle = n\eta^{n-1}|0\rangle. \quad (19)$$

因此, 右矢集合 (18) 是这样的,  $\eta$  或  $\bar{\eta}$  对集合中的任一右矢作用都会产生一个与此集合相关的右矢. 至此, 我们问题中的所有动力学变量都可以表示成  $\eta$  或  $\bar{\eta}$ , 所有右矢集合 (18) 必然构成一个完全集 (否则还会有更多的力学变量). 对于  $H$  的本征值 (16) 中的每一个, 只有一个本征右矢, 所以  $H$  就只有它自己组成一个对易可观测量完全集. 式 (18) 中的各个右矢对应于振子的各个定态. 能量为  $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega$  的定态对应于  $\eta^n|0\rangle$ , 这被称为第  $n$  级量子态.

借助于式 (19), 右矢  $\eta^n|0\rangle$  长度的平方是

$$\langle 0|\bar{\eta}^n\eta^n|0\rangle = n\langle 0|\bar{\eta}^{n-1}\eta^{n-1}|0\rangle = \dots = n!. \quad (20)$$

只要  $|0\rangle$  是归一化的. 因此, 式 (18) 中的各个右矢分别乘上系数  $n!^{-\frac{1}{2}}$ , 这里  $n = 0, 1, 2, \dots$ , 就可以组成一个表象的标准基右矢,  $H$  在该表象中是对角的. 任意右矢  $|x\rangle$  可以展开为

$$|x\rangle = \sum_0^{\infty} x_n \eta^n |0\rangle, \quad (21)$$

其中  $x_n$  是数. 用此方法, 我们使右矢  $|x\rangle$  对应于变量  $\eta$  的幂级数  $\sum x_n \eta^n$ , 这个幂级数中的不同项对应不同的定态. 如果  $|x\rangle$  是归一化的, 这个展开式定义了一个态, 对于这个态, 振子处于第  $n$  级量子态的概率 ——  $H$  取值  $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega$  的概率<sup>1</sup>——是

$$P_n = n! |x_n|^2. \quad (22)$$

我们可以把  $|0\rangle$  看作标准右矢, 把  $\eta$  的幂级数看作波函数, 因为任意右矢可以表示为该波函数乘在这个标准右矢上. 于是我们得到一类新的波函数, 它不同于通常定义 [3] 的波函数, 这里的波函数是复数动力学变量  $\eta$  的函数, 而不是可观测量的函数. 这一观点由福克 [4] 首先提出, 所以我们称这一表象为福克表象. 许多情形中, 它是描述谐振子态的最方便的方法. 标准右矢  $|0\rangle$  满足 (17), 它替代了对薛定谔表象中标准右矢的条件<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>给定一组对易可观测量  $\xi, \eta, e, \dots$ , 我们可以构造它们的函数, 在满足  $\xi = a, \eta = b, e = c, \dots$  的条件下等于 1, 这里的  $a, b, c, \dots$  都是实数, 若这些条件不满足则等于零. 这一函数对任何态的平均值是  $\xi, \eta, e, \dots$  分别对这个态有值  $a, b, c, \dots$  的概率, 记作  $P_{abc}$ . 所以, 如果这个态对应于归一化的右矢量  $|x\rangle$ , 从我们对物理解释的普遍假设可以得到

$$P_{abc\dots} = \langle x | \delta_{\xi a} \delta_{\eta b} \delta_{ec} \dots | x \rangle$$

设  $\xi$  是对易可观测量的完全集, 如果各  $\xi$  都有分立的本征值, 利用关系  $\sum_{\xi'} |\xi'\rangle \langle \xi'| = 1$ , 可得

$$\begin{aligned} P_{\xi'_1 \dots \xi'_u} &= \sum_{\xi''_1 \dots \xi''_u} \langle x | \delta_{\xi_1 \xi'_1} \dots \delta_{\xi_n \xi'_n} | \xi''_1 \dots \xi''_u \rangle \langle \xi''_1 \dots \xi''_u | x \rangle \\ &= \sum_{\xi''_1 \dots \xi''_u} \langle x | \delta_{\xi_1 \xi'_1} \dots \delta_{\xi_n \xi'_n} | \xi''_1 \dots \xi''_u \rangle \langle \xi''_1 \dots \xi''_u | x \rangle \\ &= \langle x | \xi'_1 \dots \xi'_u \rangle \langle \xi'_1 \dots \xi'_u | x \rangle \\ &= |\langle \xi'_1 \dots \xi'_u | x \rangle|^2 \end{aligned}$$

这样我们就得到了一个简单结果, 各  $\xi$  有值  $\xi'$  的概率恰好等于, 与相关的态对应的归一化右矢量的相应坐标的模平方.

<sup>2</sup>它是所有动量的共同本征右矢, 且对应于本征值零.[3, 第 4 章]

## 2 测不准原理

如果  $A$  和  $B$  是可观测量 (即自伴算子), 而态矢  $u$  满足条件  $\langle [A, B]u, u \rangle \neq 0$ , 那么  $A$  和  $B$  的概率分布不可能同时集中在这一任意的态  $u$ . 确切的说, 假设  $\mu$  是  $\mathbb{R}$  上的一个概率测度, 我们能用  $\mu$  关于  $a \in \mathbb{R}$  的二阶矩

$$\left[ \int (\lambda - a)^2 d\mu(\lambda) \right]^{1/2},$$

作为  $\mu$  对  $a$  偏离程度的衡量. 如果  $\mu$  是可观测量  $A = \int \lambda d\Pi(\lambda)$  在态  $u$  处的分布,  $\Pi$  是自伴算子  $A$  的谱族, 也就是说,  $\mu(E) = \langle \Pi(E)u, u \rangle$ , 我们有

$$\left[ \int (\lambda - a)^2 d\mu(\lambda) \right]^{1/2} = \langle (A - a)^2 u, u \rangle^{1/2} = \|(A - a)u\|.$$

于是一般的测不准原理就可以阐明如下: 如果  $A$  和  $B$  是希尔伯特空间  $H$  上的自伴算子, 那么

$$\|(A - a)u\| \|(B - b)u\| \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B]u, u \rangle| \quad (23)$$

对所有的  $u \in \text{Dom}(AB) \cap \text{Dom}(BA)$  和所有的  $a, b \in \mathbb{R}$  都成立. 等号成立只有当  $(A - a)u$  与  $(B - b)u$  相差一纯虚数因子.

为了说明这一点, 首先注意到常数与任意算符对易

$$[A, B] = [A - a, B - b] \quad (24)$$

对任意  $a, b \in \mathbb{R}$  都成立. 通过合并 (24) 式中的同类项我们得到了

$$\begin{aligned} \langle [A, B]u, u \rangle &= \langle (B - b)u, (A - a)u \rangle - \langle (A - b)u, (B - a)u \rangle \\ &= 2i\Im \langle (B - b)u, (A - a)u \rangle. \end{aligned}$$

因而

$$\frac{1}{2} |\langle [A, B]u, u \rangle| \leq |\langle (B - b)u, (A - a)u \rangle| \leq \|(A - a)u\| \|(B - b)u\|. \quad (25)$$

这就是 (23) 式, 其中第一个等号成立只有当  $\langle (B - b)u, (A - a)u \rangle$  是纯虚数, 而第二个等号成立只有当  $(A - a)u$  与  $(B - b)u$  线性相关. 综合二者, 就得到了 (23) 式中等号成立的条件.

我们将这一结果应用于  $L^2(\mathbb{R})$  上的位置算符  $X = x$  与动量算符  $D = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$ . 如果  $u \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , 那么

$$\|(X - a)u\|_2 \|(D - b)u\|_2 \geq \frac{1}{4\pi} \|u\|_2^2. \quad (26)$$

并且等号成立仅当

$$u(x) = ce^{2\pi ibx} e^{-\pi r(x-a)^2}. \quad (27)$$

其中  $c \in \mathbb{C}$  以及  $r > 0$ . 由一般的测不准原理及  $[X, D] = -\frac{1}{2\pi i} I$ , 我们只需要验证等号成立的条件是 (27) 式成立. 由 (25) 式中二等号的成立条件我们得到了

$$u'(x) - 2\pi ib u(x) = 2\pi r(x - a)u(x) \quad (28)$$

对某一实数  $r$  成立. 而微分方程 (28) 的解正具有该形式 (27).

由 AM-GM 不等式, 我们有如果  $u \in L^2(\mathbb{R})$ , 那么

$$\|Xu\|_2^2 + \|Du\|_2^2 \geq \frac{1}{2\pi} \|u\|_2^2, \quad (29)$$

等号成立只有当  $u(x) = ce^{-\pi x^2}$ . 值得一提的是, (29) 与 (26) 实质上是等价的. 下面我们来说明这一点. 如果我们令  $u_\alpha = \sqrt{\alpha}u(\alpha x)$ ,  $\alpha > 0$ . 因为  $\|Xu_\alpha\|_2 = \alpha^{-1}\|Xu\|_2$  以及  $\|Du_\alpha\|_2 = \alpha\|Du\|_2$ , 于是 (29) 式变为

$$\alpha^{-2}\|Xu\|_2^2 + \alpha^2\|Du\|_2^2 \geq \frac{1}{2\pi} \|u\|_2^2, \quad (30)$$

关于  $\alpha > 0$  最小化 (30) 式左端就得到了 (26). 而等号成立成立只有当  $v(x) = e^{-2\pi ib(x+a)}u(x+a)$ , 这就是 (26) 式等号成立的条件.

这些结果都可以自然地推广到  $\mathbb{R}^n$  上去. 也即是, 如果  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\|(X_j - a_j)u\|_2 \|(D_j - b_j)u\|_2 \geq \frac{1}{4\pi} \|u\|_2^2 \quad (a_j, b_j \in \mathbb{R}), \quad (31)$$

$$\|X_j u\|_2^2 + \|D_j u\|_2^2 \geq \frac{1}{2\pi} \|u\|_2^2, \quad (32)$$

等号对 (31)[相应的, (32)] 中固定的  $j$  成立只有当

$$u(x) = v(x)e^{2\pi ib_j x_j - \pi r(x_j - a_j)^2} \quad [\text{相应的, } u(x) = v(x)e^{-\pi x_j^2}]$$

其中  $v(x)$  与  $x_j$  无关, 且等号对 (31)[相应的, (32)] 中所有的  $j$  成立只有当

$$u(x) = c \exp \sum_{j=1}^n (2\pi ib_j x_j - \pi r(x_j - a_j)^2) \quad [\text{相应的, } u(x) = c \exp(-\pi x^2)].$$

### 3 西格 - 巴格曼空间

我们注意到如果自伴算子  $P_j$  与  $Q_j$  满足典则对易关系,

$$[P_j, P_k] = [Q_j, Q_k] = 0, \quad [P_j, Q_k] = \frac{\delta_{jk}}{2\pi i} I, \quad (33)$$

那么算子  $A_j = \sqrt{\pi}(Q_j + iP_j)$  与  $A_j^* = \sqrt{\pi}(Q_j - iP_j)$  满足对易关系

$$[A_j, A_k] = [A_j^*, A_k^*] = 0, \quad [A_j, A_k^*] = \delta_{jk} I. \quad (34)$$

反之亦然. 后一关系式 (34) 也被算子  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial z_j}$  和  $\sqrt{\pi} z_j$  满足, 所以这启发我们去寻找一个由全纯函数构成的希尔伯特空间  $H$ , 在其上这些算子是彼此自伴的. 一个典型的代表就是由  $L^2(\mathbb{C}^n, \omega(z, \bar{z}) dz)$  中所有的整函数构成的空间, 其中  $\omega$  是一个合适的正权重函数, 我们要求的条件是

$$\sqrt{\pi} \int z_j F \bar{G} \omega dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} F \frac{\partial \bar{G}}{\partial z_j} \omega dz$$

对任意  $F, G \in H$  都成立. 但是由分部积分公式, 假定  $F, G$  与  $\omega$  的边界项为 0,

$$\int F \frac{\partial \bar{G}}{\partial z_j} \omega dz = - \int \bar{G} \frac{\partial (F \omega)}{\partial \bar{z}_j} dz = - \int F \bar{G} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}_j} dz.$$

因为  $F$  是全纯的. 所以我們必須有  $\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}_j} = -\pi z_j \omega$  对所有  $j$  成立, 或者, 令  $z = x + iy$ ,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_j} + i \frac{\partial \omega}{\partial y_j} = -2\pi(x_j + iy_j)\omega.$$

因为  $\omega$  是正的, 这意味着

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_j} = -2\pi x_j \omega \text{ 与 } \frac{\partial \omega}{\partial y_j} = -2\pi y_j \omega, \quad \text{或者 } \nabla \log \omega = (-2\pi x, -2\pi y).$$

所以  $\log \omega = -\pi(x^2 + y^2) + C = -\pi|z|^2 + C$ . 我们可以取  $C = 0$ , 于是  $\omega = e^{-\pi|z|^2}$ , 我们就得到了空间  $H$ .

我们将  $H$  称作西格 - 巴格曼空间, 用记号  $\mathcal{F}_n$  来表示. 根据上面的讨论,  $\mathcal{F}_n$  是  $L^2(\mathbb{C}^n, e^{-\pi|z|^2} dz)$  的子空间, 因而其上装备有内积与范数

$$\langle F | G \rangle = \int_{\mathbb{C}} F(z) \overline{G(z)} e^{-\pi|z|^2} dz, \quad \|F\| = \sqrt{\langle F | F \rangle}. \quad (35)$$

下面我们验证

$$1, \quad z, \quad z^2, \quad \dots$$

是  $\mathcal{F}_n$  的在  $n = 1$  时的一组正交基. 首先, 它们两两之间的内积为

$$\langle z^m | z^n \rangle = \int_{\mathbb{C}} z^m \bar{z}^n e^{-\pi|z|^2} dz = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{i\theta(m-n)} r^{m+n+1} e^{-\pi r^2} d\theta dr. \quad (36)$$

注意到  $\theta$ -积分只有当  $m = n$  时非零, 此时我们得到  $\|z^n\|^2 = \frac{n!}{\pi^n}$ . 不妨记  $e_n = \sqrt{\frac{\pi^n}{n!}} z^n : n = 0, 1, 2, \dots$ . 那么,

$$\langle F | e_n \rangle = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z| < R} F(z) \overline{e_n(z)} e^{-\pi|z|^2} dz. \quad (37)$$

由于泰勒级数  $\sum a_k z^k$  在  $|z| < R$  上一致收敛到  $F$ , 将此式代入 (37) 式就有

$$\int_{|z| < R} F(z) \overline{e_n(z)} e^{-\pi|z|^2} dz = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{|z| < R} z^k \overline{e_n(z)} e^{-\pi|z|^2} dz. \quad (38)$$

注意到  $z^k$  与  $z^n$  之间的正交关系 (36), 我们有

$$\langle F | e_n \rangle = \lim_{R \rightarrow \infty} a_n \int_{|z| < R} z^n \overline{e_n(z)} e^{-\pi|z|^2} dz = a_n \int_{\mathbb{C}} z^n \overline{e_n(z)} e^{-\pi|z|^2} dz.$$

于是  $\langle F | e_n \rangle = 0$  蕴含了  $a_n = 0$ . 这就证明了规范化后的态矢

$$1, \quad \sqrt{\pi} z, \quad \sqrt{\frac{\pi^2}{2}} z^2, \quad \dots$$

是  $\mathcal{F}_1$  的一组规范正交基. 上面只讨论了  $n = 1$  的情形, 当  $n > 1$  时  $\mathcal{F}_n$  的一组规范正交基  $e_\alpha(z) = \sqrt{\frac{\pi^{|\alpha|}}{\alpha!}} z^\alpha$ ,  $\alpha$  遍历所有多重自然数指标, 也可以类似地得到.

接下来, 我们要找一个从  $L^2(\mathbb{R}^n)$  映射到  $\mathcal{F}_n$  的算子

$$Bf(z) = \int f(x) B(z, x) dx$$

保持算子

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi}(X_j + iD_j) &= \sqrt{\pi}x_j + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ 和 } \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial z_j}, \\ \text{还有 } \sqrt{\pi}(X_j - iD_j) &= \sqrt{\pi}x_j - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ 和 } \sqrt{\pi}z_j, \end{aligned}$$

彼此之间的对应关系. 同样, 由分部积分公式

$$\int [(X_j \pm iD_j)f(x)] B(z, x)dx = \int f(x) [(X_j \mp iD_j)B(z, x)] dx,$$

所以对条件将被满足如果

$$\left(\pi x_j + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) B(z, x) = \pi z_j B(z, x), \quad \left(\pi x_j - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) B(z, x) = \pi \frac{\partial}{\partial z_j} B(z, x),$$

或者

$$\frac{\partial}{\partial x_j} B(z, x) = 2\pi(z_j - x_j)B(z, x), \quad \frac{\partial}{\partial z_j} B(z, x) = \pi x_j B - \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial x_j} = \pi(2x_j - z_j)B.$$

因此

$$\frac{\partial \log B}{\partial x_j} = 2\pi(z_j - x_j), \quad \frac{\partial \log B}{\partial z_j} = \pi(2x_j - x_j),$$

积分此二方程得到

$$\log B = 2\pi xz - \pi x^2 - \frac{1}{2}\pi x^2 + C.$$

常数  $C$  可取  $\log 2^{\frac{n}{4}}$  使得  $B$  是西算子.

最后, 我们证明  $B$  是满射. 为此我们先研究  $\mathcal{F}_n$  上全纯函数的一些性质. 首先, 由施瓦茨不等式

$$\left| \sum \langle F | e_\alpha \rangle \sqrt{\pi^{|\alpha|}/\alpha!} z^\alpha \right| \leq \left( \sum |\langle F | e_\alpha \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum \pi^{|\alpha|} z^{2\alpha}/\alpha! \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (39)$$

于是我们得到了  $\mathcal{F}_n$  上全纯函数的逐点估计

$$|F(z)| \leq e^{\frac{\pi}{2}|z|^2} \|F\|, \quad z \in \mathbb{C}^n \quad (40)$$

固定  $z$ ,  $F \mapsto F(z)$  定义出  $\mathcal{F}_n$  上的有界线性泛函, 所以由黎茨表示定理存在  $F_z \in \mathcal{F}_n$  使得

$$F(z) = \langle F | F_z \rangle,$$

而且

$$F_z(w) = \sum \langle F_z | e_\alpha \rangle e_\alpha(w) = \sum \overline{e_\alpha(z)} e_\alpha(w) = e^{\pi w \bar{z}}.$$

换句话说, 函数  $\kappa(z, \bar{w}) = e^{\pi z \bar{w}}$  是  $\mathcal{F}_n$  的再生核, 即

$$F(z) = \int e^{\pi z \bar{w}} F(w) e^{-\pi |w|^2} dw \quad (41)$$

对任意  $F \in \mathcal{F}_n, z \in \mathbb{C}^n$  都成立.

如果  $T$  是  $\mathcal{F}_n$  上的有界线性算子, 那么令  $\kappa_T(z, \bar{w}) = TF_w(z)$

$$TF(z) = \langle TF|F_z \rangle = \langle F|T^*F_z \rangle = \int \overline{T^*(F_z(w))} F(w) e^{-\pi|w|^2} dw, \quad (42)$$

并且

$$\overline{T^*(F_z(w))} = \overline{\langle T^*F_z|F_w \rangle} = \overline{\langle F_z|TF_w \rangle} = \langle TF_w|F_z \rangle = TF_w(z). \quad (43)$$

(43) 式说明了  $\kappa_T$  是一个整函数 (因为  $F_z$  反全纯地依赖于  $z$ ). 将 (43) 式代入 (42) 式就得到了

$$TF(z) = \int \kappa_T(z, \bar{w}) F(w) e^{-\pi|w|^2} dw. \quad (44)$$

如果  $\kappa(z, \bar{w})$  是一个关于  $z$  和  $\bar{w}$  的整函数, 令  $u = \frac{1}{2}(z + \bar{w})$  以及  $v = -\frac{1}{2}i(z - \bar{w})$  满足  $z = u + iv$  以及  $\bar{w} = u - iv$ . 那么  $\kappa(z, \bar{w}) = \iota(u, v)$  其中  $\iota$  是整的. 但是  $\iota$  由它在  $u$  和  $v$  取实值时候的值所确定 (比方说, 泰勒公式), 而  $u$  和  $v$  取实值只有当  $z = w$ . 故一个关于  $z$  和  $\bar{w}$  的整函数  $\kappa(z, \bar{w})$  由它在对角线  $z = w$  上的取值唯一确定. 结合上面的讨论知, 一个  $\mathcal{F}_n$  上的有界线性算子  $T$  由函数  $\kappa_T(z, \bar{z}) = \langle TF_z|F_z \rangle$  唯一确定.

一个希尔伯特空间中存在再生核 (41) 的重要的结论就是它上面的任意有界线性算子都可以表示成积分算子的形式 (44), 利用这一结果我们将证明  $B$  是满射. 令

$$\phi_0(x) = 2^{\frac{n}{4}} e^{-\pi x^2} \quad (45)$$

是标准高斯函数, 注意到

$$e^{2\pi i(pD+qX)} f(x) = e^{2\pi iqx+\pi ipq} f(x+p). \quad (46)$$

为了得到 (46) 式, 不妨令

$$g(x, t) = [e^{2\pi it(pD+qX)} f](x).$$

知  $g$  是微分方程  $\frac{\partial g}{\partial t} = 2\pi i(pD + qX)g$  在初始条件  $g(x, 0) = f(x)$  下的解, 即

$$\frac{\partial g}{\partial t} - \sum p_j \frac{\partial g}{\partial x_j} = 2\pi i q x g, \quad g(x, 0) = f(x). \quad (47)$$

(47) 式左边的表达式是  $g$  沿着向量  $(-p, 1)$  的方向导数, 所以如果我们令

$$x(t) = x - tp, \quad G(t) = g(x(t), t),$$

那么就得到了

$$G'(t) = 2\pi i q(x - tp), \quad G(0) = f(x). \quad (48)$$

常微分方程 (48) 具有显示解

$$g(x - tp, t) = G(t) = f(x) e^{2\pi i t q x - \pi i t^2 p q}. \quad (49)$$

在 (49) 式中令  $t = 1$  并替换  $x$  为  $x + p$ , 就得到了 (46) 式. 由此即知  $e^{2\pi i(pD+qX)}$  是  $L^2$  上的酉算子, 并且它的复合关系具有以下形式

$$e^{2\pi i(pD+qX)} e^{2\pi i(rD+sX)} = e^{\pi i(ps-qr)} e^{2\pi i[(p+r)D+(q+s)X]}. \quad (50)$$

令  $z = p + iq$ ,  $w = r + is$ , 由 (45) 和 (46)

$$\langle e^{2\pi i(pD+qX)} f | \phi_0 \rangle = e^{-\frac{\pi}{2}|z|^2} Bf(z),$$

并且由 (50)

$$[B(e^{2\pi i(rD+sX)} f)](z) = e^{-\frac{\pi}{2}|w|^2 - \pi z \bar{w}} Bf(z + w). \quad (51)$$

然后注意到

$$B(\phi_0)(z) = 2^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|z|^2} \int e^{-2\pi z x - 2\pi x^2} dx = 1 = F_0(z), \quad (52)$$

于是根据 (51) 和 (52)

$$B(e^{2\pi i(rD+sX)} \phi_0)(z) = e^{-\frac{\pi}{2}|w|^2 - \pi z \bar{w}} B\phi_0(z + w) = e^{-\frac{\pi}{2}|w|^2} F_{-w}(z), \quad (53)$$

因此所有的  $F_w$  都在  $B$  的像集中. 由于  $\langle F | F_w \rangle = 0$  仅当  $F = 0$ , 这就证明了证明了  $B$  是满射.

由 (46), 对任意  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ,

$$(e^{2\pi i(pD+qX)} f, g) = \int e^{2\pi i q x + \pi i p q} f(x + p) \overline{g(x)} dx = \int e^{2\pi i q y} f(y + \frac{1}{2}) \overline{g(y - \frac{1}{2}p)} dy.$$

如果将上式右端视作两变元  $(y, p)$  的平方可积函数空间上的线性算符, 那么它将是这两个变换的复合: 保测变换  $(y, p) \mapsto (y + \frac{1}{2}p, y - \frac{1}{2}p)$  和关于第一个变元的傅里叶逆变换, 因而它是酉算子. 故

$$\left( (e^{2\pi i(pD+qX)} f_1, g_1) (p, q), (e^{2\pi i(rD+sX)} f_2, g_2) (r, s) \right) = (f_1, f_2) (g_1, g_2) \quad (54)$$

对任意  $f_1, g_1, f_2, g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$  都成立. 上面的讨论用表示论的术语来概括, (54) 式就是说

$$\rho_h(p, q, t) = e^{2\pi i(hpD+qX+tI)}, \quad h \in \mathbb{R} - \{0\}$$

是海森堡群  $\mathbb{H}_n$  到平方可积函数空间  $L^2(\mathbb{R}^n)$  的变换群上的一个平方可积表示, 它是不可约的, 而 (53) 式也即是, 福克表象中的相干态正好是函数  $E_z$ .

我们现在讨论西格 - 巴格曼空间在福克表象下的形式. 我们定义湮灭算符  $A_j$  和产生算符  $A_j^*$  如下

$$A_j = \sqrt{\pi} B(X_j + iD_j) B^{-1}, \quad A_j^* = \sqrt{\pi} B(X_j - iD_j) B^{-1}.$$

注意到

$$A_j F = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial F}{\partial z_j}, \quad A_j^* F = \sqrt{\pi} z_j F$$

算符  $A_j$  与  $A_j^*$  在

$$\text{Dom}(A_j) = \left\{ F \in \mathcal{F}_n : \frac{\partial F}{\partial z_j} \in \mathcal{F}_n \right\}, \quad \text{Dom}(A_j^*) = \{ F \in \mathcal{F}_n : z_j F \in \mathcal{F}_n \},$$

上是彼此共轭的而且它们满足对易关系

$$[A_j, A_k] = [A_j^*, A_k^*] = 0, \quad [A_j, A_k^*] = \delta_{ij} I.$$

算符  $A_j$  与  $A_j^*$  作用在基  $\{z^\alpha\}$  上具有非常简单的结果. 如果我们定义  $1_j$  为多重指标: 它的第  $j$  个分量为 1 而其他分量为 0. 那么明显的

$$\frac{\partial z^\alpha}{\partial z_j} = \alpha_j z^{\alpha-1_j}, \quad z_j z^\alpha = z^{\alpha+1_j}.$$

因此

$$A_j e_\alpha = \sqrt{\alpha_j} e_{\alpha-1_j}, \quad A_j^* e_\alpha = \sqrt{\alpha_j + 1} e_{\alpha+1_j},$$

让我们将  $F$  关于基  $\{e_\alpha\}$  作展开并利用到帕塞瓦等式,

$$\|z_j F\|^2 = \|F\|^2 + \|\partial F / \partial z_j\|^2.$$

由此可得

$$\text{Dom}(A_j) = \text{Dom}(A_j^*).$$

也即是, 产生算符与湮灭算符定义域相同.

对于一般的具有普朗克常数  $h \neq 1$  的对易关系式

$$[P_j, P_k] = [Q_j, Q_k] = 0, \quad [P_j, Q_k] = \frac{h\delta_{jk}}{2\pi i} I,$$

只需要将原始的积分测度替换成为  $e^{-\pi h|z|^2} dz$ , 就可以得到类似的结果. 具体的构造参考 [5, 1.6 节]. 进一步地, 对任意的正实数  $p$ , 我们还可以讨论空间  $\mathcal{F}_{n,h}^p$ , 简记为  $\mathcal{F}_h^p$ : 将定义 (35) 中的  $L^2$  范数替换成  $L^p$  范数, 得到一类新的全纯函数空间

$$\mathcal{F}_h^p = \left\{ F \in H(\mathbb{C}^n) : \|F\|_{p,h}^p = \int |F(z)|^p e^{-h\pi|z|^2} dz < \infty \right\},$$

以及

$$\mathcal{F}_h^\infty = \left\{ F \in H(\mathbb{C}^n) : \|F\|_{\infty,h} = \text{ess sup } |F(z)| e^{-h\pi|z|^2} < \infty \right\}.$$

可以验证  $\mathcal{F}_h^2$  也是再生核希尔伯特空间. 根据类似于 (40) 式的估计, 我们有下面的连续嵌入关系

$$\mathcal{F}_h^p \hookrightarrow \mathcal{F}_h^q \hookrightarrow \mathcal{F}_h^\infty, \quad 0 < p < q < \infty$$

以及极大模原理, 即: 对任意  $h > 0$  以及  $p \geq 1$ , 存在一个正数  $R = R(\alpha, p)$  使得

$$\|f\|_{p,h} \leq \|g\|_{p,h}$$

对任何满足下式的  $f, g$  都成立

$$|f(z)| \leq |g(z)|, \quad |z| \geq R. \quad (55)$$

这里不详细展开了, 有兴趣的读者可以参考 Zhu K. Analysis on Fock spaces[M]. Springer Science & Business Media, 2012. 第二章. 然而这都是出于数学需要了.

## 4 维纳混沌分解

设  $E$  是实线性空间, 其上具有与线性运算相容的拓扑,  $E'$  是由所有  $E$  上的连续线性泛函组成的对偶空间. 对  $x \in E'$  以及  $n = 0, 1, 2, \dots$ , 定义威克张量积  $:x^{\otimes n} : \in (E')^{\widehat{\otimes} n}$  如下

$$\left. \begin{aligned} &:x^{\otimes 0} := 1 \\ &:x^{\otimes 1} := x \\ &\vdots \\ &:x^{\otimes n} := x \widehat{\otimes} :x^{\otimes(n-1)} : - (n-1) \tau \widehat{\otimes} :x^{\otimes(n-2)} : \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

依此类推. (56) 式中的  $\tau \in E' \otimes E'$ ,  $\langle \tau, \xi \otimes \eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$ ,  $\xi, \eta \in E$  称作迹算子. 如果  $E$  是一个核空间, 其上装备有可数多个内积  $(\cdot, \cdot)_n$ , 满足下面的递增关系

$$(\cdot, \cdot)_1 \leq (\cdot, \cdot)_2 \leq \dots$$

并使得对任意  $m \leq n$ , 嵌入映射  $T_m^n : E_n \rightarrow E_m$  是希尔伯特-施密特算子, 其中  $E_n$  是  $E$  关于内积  $(\cdot, \cdot)_n$  的完备化, 我们就可以取定一组规范正交基  $\{e_j\} \subset H$  使得  $\tau$  具有如下形式

$$\langle \tau, \omega \rangle = \sum_1^\infty \langle e_j \otimes e_j, \omega \rangle, \quad \omega \in E \otimes E. \quad (57)$$

注意到  $E$  到  $H$  有连续嵌入, 那么  $|\cdot| \leq |\cdot|_1$  并且典则嵌入  $E_1 \rightarrow H$  和  $H \rightarrow E_{-1}(= E'_1)$  都是希尔伯特-施密特型的. 于是级数  $\sum |e_j|_{-1}^2$  收敛. 记

$$\tau_N = \sum_1^N e_j \otimes e_j \in H \otimes H,$$

那么

$$\langle \tau - \tau_N, \omega \rangle = \sum_{j>N} \langle e_j \otimes e_j, \omega \rangle, \quad \omega \in E \otimes E.$$

因此在任意  $E \otimes E$  的有界子集  $K$  上

$$\sup_{\omega \in K} |\langle \tau - \tau_N, \omega \rangle| \leq \sup_{\omega \in K} |\omega|_1 \sum_{j>N} |\langle e_j \otimes e_j, \omega \rangle|_{-1} = \sup_{\omega \in K} \sum_{j>N} |e_j|_{-1}^2 \rightarrow 0. \text{ 当 } N \rightarrow \infty.$$

换句话说,  $\tau = \sum_1^\infty e_j \otimes e_j$  在  $(E \otimes E)'$  的强拓扑下收敛.

下面我们用  $\mathcal{P}_n$  来表示下面的映射的有限线性组合

$$x \mapsto \langle x^{\otimes n}, \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n \rangle.$$

与此相仿, 用  $\mathcal{Q}_n$  来表示映射

$$x \mapsto \langle : x^{\otimes n} :, \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n \rangle$$

的有限线性组合. 我们有

$$\mathcal{P}_n = \left\{ \sum c_m \langle x^{\otimes n}, \xi_m^{\otimes n} \rangle \right\}, \quad \mathcal{Q}_n = \left\{ \sum c'_m \langle : x^{\otimes n} :, \xi_m^{\otimes n} \rangle \right\}, \quad (58)$$

上式集合中的求和均是有限项的求和. 于是

$$\sum_0^n \mathcal{P}_k = \sum_0^n \mathcal{Q}_k. \quad (59)$$

记 (58) 式中所有  $\mathcal{P}_n : n = 0, 1, 2, \dots$  的并为  $\mathcal{P}$ .  $\mathcal{P}$  中的元素称作  $E'$  上的多项式. 我们称  $\phi \in \mathcal{P}$  是威克多项式, 如果

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle : x^{\otimes n} :, f_n \rangle,$$

其中  $f_n \in E^{\widehat{\otimes} n}$  且只有有限多项非零. 威克多项式可以用埃米特多项式来计算. 设  $H_n(x)$  是  $n$  次埃米特多项式, 我们有

$$\langle : x^{\otimes n} :, \xi^{\otimes n} \rangle = \frac{|\xi|^n}{2^{n/2}} H_n \left( \frac{\langle x, \xi \rangle}{\sqrt{2}|\xi|} \right). \quad (60)$$

两个威克多项式的内积

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle : x^{\otimes n} :, f_n \rangle, \quad \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle : x^{\otimes n} :, g_n \rangle, \\ \int_{E'} \phi(x) \psi(x) \mu(dx) &= \sum_{n=0}^{\infty} n! (f_n, g_n). \end{aligned} \quad (61)$$

特别的,

$$\|\phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |f_n|^2.$$

傅里叶变换为

$$e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} = \int_{E'} e^{i\langle x, \xi \rangle} \mu(dx), \quad \xi \in E,$$

的测度  $\mu$  称作  $E'$  上的高斯测度. 如果  $\xi_1, \dots, \xi_n \in E$  是  $H$  的规范正交集, 那么  $\mu$  在映射

$$x \mapsto (\langle x, \xi_1 \rangle, \dots, \langle x, \xi_n \rangle) \in \mathbb{R}^n, \quad x \in E'$$

下的像是  $\mathbb{R}$  上标准高斯测度的乘积

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-(t_1^2 + \dots + t_n^2)/2} dt_1 \dots dt_n.$$

通过这一事实我们发现如果  $\xi \in E$  满足  $|\xi| = 1$ , 那么

$$\int_{E'} H_m \left( \frac{\langle x, \xi \rangle}{\sqrt{2}} \right) H_n \left( \frac{\langle x, \xi \rangle}{\sqrt{2}} \right) \mu(dx) = 2^n n! \delta_{mn}. \quad (62)$$

将 (60) 式带入 (62) 式就得到了 (61) 式.

设  $H$  是实可分希尔伯特空间, 其上定义有范数  $|\cdot| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$ . 记  $F$  为所有  $H$  上的有限维正交投影算子  $P$  构成的偏序集 (对  $P, Q \in F$ ,  $P > Q$  当且仅当  $P(H) \subset Q(H)$ ),  $R$  为具有以下形式的柱集全体

$$E = \{x \in H : Px \in A\},$$

其中  $P \in F$ ,  $A$  是  $PH$  的博雷尔子集. 容易验证  $R$  对有限交和补封闭, 但不对可数交封闭.  $H$  上形如  $f(x) = g(Px)$  的函数称作是柱状的, 如果  $P \in F$ ,  $g$  是  $P(H)$  上的博雷尔函数. 容易验证  $f$  是柱状函数当且仅当存在  $H$  中的规范正交集  $e_1, e_2, \dots, e_n$  和  $\mathbb{R}^n$  上的博雷尔函数  $h$  使得  $f(x) = h((x, e_1), \dots, (x, e_n))$ .  $H$  上的非负集函数  $\mu$  称作是高斯测度, 如果  $E = \{x \in H : Px \in A\}$ ,

$$\mu(E) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_A e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx, \quad (63)$$

其中  $n = \dim P(H)$ ,  $dx$  是  $P(H)$  上的勒贝格测度. 显然,  $\mu$  是有限可加的. 但是,  $\mu$  不是可数可加的.

令  $\{e_n\}$  为  $H$  的规范正交基, 记

$$E_n = \{x \in H : |(x, e_k)| \leq n, k = 1, 2, \dots, a_n\}.$$

显然,  $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  无论我们如何取  $a_n \uparrow \infty$ . 现在

$$\mu(E_n) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{a_n} \underbrace{\int_{-n}^n \cdots \int_{-n}^n}_{a_n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{a_n} x_j^2} dx_1 \cdots dx_{a_n} = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n e^{-\frac{|u|^2}{2}} du \right)^{a_n}.$$

对任意  $n$ , 选择  $a_n$  充分大使得  $\mu(E_n) < \frac{1}{2^{n+1}}$ . 不妨设  $a_n \rightarrow \infty$ , 那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < 1/2. \quad (64)$$

然而我们注意到

$$H = \{x \in H : (x, e_1) \in \mathbb{R}\}. \quad (65)$$

将 (65) 式代入 (63) 式就得到了

$$\mu(H) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1.$$

这与 (64) 式相违背. 因此  $\mu$  不是可数可加的.

在  $H$  中选择一组规范正交基  $\{e_n\}$ , 定义  $\mathbb{R}^n$  上的博雷尔测度如下

$$\mu_{e_1, \dots, e_n}(A) = \mu\{x \in H : ((x, e_1), \dots, (x, e_n)) \in A\}.$$

显然,  $\{\mu_{e_1, \dots, e_n}\}$  是一族相容的概率测度, 因而由柯尔莫哥洛夫扩张定理, 存在一个概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, m)$  和随机变量  $\xi_1, \xi_2, \dots$  使得对任意  $n$ ,

$$\{\omega : (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)) \in A\} = \mu_{e_1, e_2, \dots, e_n}(A).$$

因而  $\{\xi_n\}$  是独立的高斯随机变量序列, 它们都具有均值 0 和方差 1. 我们沿用西格 [11] 的记号  $n(e_j)$  来表示  $\xi_j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ . 令  $h \in H$ , 级数  $\sum_{j=1}^{\infty} (h, e_j) n(e_j)$  收敛到一个  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, m)$  中的随机变量, 并且收敛的极限唯一, 记作  $n(h)$ . 进一步的讨论发现  $n(h)$  服从均值为 0, 方差为  $|h|^2$  的正态分布并且满足

$$E_m[n(h)n(k)] = (h, k), \quad h, k \in H.$$

因此如果  $h \perp k$  那么  $n(h)$  与  $n(k)$  独立. 显然,  $n : H \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, m)$  是线性的. 如果  $f$  是柱状函数

$$f(x) = g((x, e_{j_1}), \dots, (x, e_{j_s})),$$

定义与之相关的随机变量

$$\tilde{f}(\omega) = g(\mathbf{n}(e_{j_1})(\omega), \dots, \mathbf{n}(e_{j_s})(\omega)).$$

一般而言  $\tilde{f}$  不是平方可积的, 因此我们将要考虑的是依概率收敛. 回忆随机变量列  $g_n$  称作是依概率收敛到  $g$  如果对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $n_0$  使得

$$m\{\omega \in \Omega : |g_n(\omega) - g(\omega)| > \varepsilon\} < \varepsilon \quad \text{对任意 } n > n_0.$$

现在设  $\{e_k\}$  是  $H$  的规范正交基,  $P_n$  是  $H$  到  $\text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  的正交投影. 如果令  $f_n(x) = |P_n x|^2$ , 那么  $f_n$  是柱状函数并且对任意  $x \in H$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = |x|^2$ . 然而  $\tilde{f}_n$  却不是依概率收敛的. 因为当  $n \geq k$  时,

$$\begin{aligned} m\{\omega \in \Omega : |\tilde{f}_n(\omega) - \tilde{f}_k(\omega)| > \varepsilon\} &= m\{\omega \in \Omega : |(P_n - P_k)x|^2 > \varepsilon\} \\ &= 1 - \mu\{x \in H : |(P_n - P_k)x|^2 \leq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

但是

$$\{y_1^2 + \dots + y_j^2 \leq \varepsilon\} \subset \{|y_1| \leq \sqrt{\varepsilon}, \dots, |y_j| \leq \sqrt{\varepsilon}\}.$$

因此

$$m\{\omega \in \Omega : |\tilde{f}_n(\omega) - \tilde{f}_k(\omega)| > \varepsilon\} \geq 1 - \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right)^{n-k} \rightarrow 1 \text{ 当 } n - k \rightarrow \infty.$$

为了克服这一困难, 我们引入下面的定义. 一个半范是  $H$  上的非负函数, 它满足关于数乘的线性性质和三角不等式

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \alpha \in \mathbb{R}, x, y \in H.$$

半范称作是可测的, 如果对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $P_0 \in F$  使得

$$\mu\{\|Px\| > \varepsilon\} < \varepsilon, \quad \text{对任意 } P \perp P_0, P \in F. \quad (66)$$

由刚才的讨论得知如果  $\dim(H) = \infty$  那么  $|\cdot|$  不是可测范数.

由定义不难看出, 一个希尔伯特-施密特算子  $T$  可以生成一个可测半范  $\|x\| = |Tx|$ . 事实上, 我们将要说明任意由双线性形式生成的可测半范都可以由

一个希尔伯特-施密特算子表示. 设  $B$  是  $H$  关于半范  $\|\cdot\|$  的完备化,  $i$  是从  $H$  到  $B$  的包含映射.  $(i, H, B)$  称作抽象维纳空间. 视  $H'$  与  $H$  为等同我们有

$$B' \hookrightarrow H \hookrightarrow B.$$

其中  $H \rightarrow B$  是连续正则嵌入. 对于  $y_1, y_2, \dots, y_n \in B'$ , 定义  $R_B$  为具有以下形式的柱集全体

$$\{x \in B : (\langle x, y_1 \rangle, \dots, \langle x, y_n \rangle) \in E\}. \quad (67)$$

和全体柱集  $R_B$  上的概率测度

$$\tilde{\mu}\{x \in B : (\langle x, y_1 \rangle, \dots, \langle x, y_n \rangle) \in E\} = \mu\{x \in H : ((x, y_1), \dots, (x, y_n)) \in E\}.$$

$\tilde{\mu}$  是  $R_B$  上的可数可加测度, 于是可以唯一地延拓成由  $R_B$  生成的  $\sigma$ -代数上的可数可加测度.[6, 定理 1] 我们来证明此  $\sigma$ -代数正是  $B$  上的博雷尔  $\sigma$ -代数.

注意到  $B$  是可分巴拿赫空间. 我们只需要证明  $\{\|x\| \leq 1\} \in \sigma(R_B)$ . 令  $\{a_n\}$  为  $B$  的稠密子集. 由哈恩-巴拿赫定理, 我们能够选取  $\{z_n\} \subset B'$  使得对任意  $n$ ,  $\|z_n\|_{B'} = 1$  并且  $\langle z_n, a_n \rangle = \|a_n\|$ . 那么

$$\{\|x\| \leq 1\} = \bigcap \{x \in B : |\langle x, z_n \rangle| \leq 1\} \in \sigma(R_B).$$

为了说明这一点, 令  $S = \{\|x\| \leq 1\}$  和  $T = \bigcap \{x \in B : |\langle x, z_n \rangle| \leq 1\}$ . 那么  $S \subset T$ . 反过来, 如果  $\|x\| = r > 1$ . 选取  $a_n$  使得  $\|x - a_n\| < \frac{r-1}{2}$ . 那么  $\|a_n\| > \frac{r+1}{2}$  并且

$$|\langle x, z_n \rangle| \geq |\langle a_n, z_n \rangle| - |\langle x - a_n, z_n \rangle| \geq \|a_n\| - \|x - a_n\| > \frac{r+1}{2} - \frac{r-1}{2} = 1.$$

因此  $x \notin T$ . 于是  $S \supset T$ .

假定  $H$  上的可测半范  $\|\cdot\|$  是由连续对称双线性形式  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  生成的, 即:

$$\|x\| = \sqrt{\langle\langle x, x \rangle\rangle}, x \in H,$$

那么存在  $H$  上的希尔伯特施密特算子  $T$  使得  $\|x\| = |Tx|$ ,  $x \in H$ . 此外,  $\|\cdot\|$  是范数当且仅当  $T$  是单射. 因为  $\langle\langle x, y \rangle\rangle$  是  $H$  上的连续双线性形式, 存在  $H$  上的有界线性算子  $S$  满足  $\langle\langle x, y \rangle\rangle = \langle Sx, y \rangle$ . 显然,  $S$  是一个严格正定的自伴算子, 而且是紧的. 依照格罗斯 [6, 中的引理 1], 我们可以选取一系列  $a_n \rightarrow \infty$  和正交投影算子  $Q_n$  使得

$$\|x\|_0 = \sum a_n \|Q_n x\|$$

是  $H$  上的可测半范, 不难验证如下定义出  $H$  上的一个紧算子

$$Kx = x/a_n, \text{ 如果 } x \in Q_n(H).$$

而且对任意  $x \in H$

$$\|x\| \leq \sum \|Q_n x\| = \sum a_n \|Q_n Kx\| = \|Kx_0\|_0. \quad (68)$$

于是 (68) 式表明了  $S$  是紧的.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\hat{T}} & B \\ \uparrow i & \searrow \tilde{T} & \uparrow i \\ H & \xrightarrow{T} & H \end{array}$$

记  $T$  为它的平方根算子, 那么我们有  $\|x\| = |Tx|$  对任意  $x \in H$  都成立. 由连续性,  $T$  可以唯一地延拓成  $B$  到  $H$  的等距映射  $\tilde{T}$ . 事实上,  $\tilde{T}$  还是酉的. 为了证明这一点, 只需要证明  $\tilde{T}$  是满射. 注意到  $\tilde{T}(B)$  是  $H$  的闭子空间, 因而我们转为证明  $\tilde{T}(B)$  在  $H$  中的正交补是  $\{0\}$ . 假设对任意  $x \in B$ ,  $(\tilde{T}x, y) = 0$ , 其中  $y \in H$ , 那么对任意  $z \in B$ ,

$$\langle\langle z, y \rangle\rangle = \langle\tilde{T}z, \tilde{T}y\rangle = \langle\tilde{T}z, Ty\rangle = \langle T\tilde{T}z, y\rangle = \langle\tilde{T}(\tilde{T}z), y\rangle = 0.$$

这就证明了  $\tilde{T}(B)$  在  $H$  中的正交补是  $\{0\}$ . 现在, 我们考虑  $B$  上的维纳测度  $p_1$ . 对任意  $x \in B$ ,

$$\int_B e^{i\langle\langle x, y \rangle\rangle} p_1(dy) = \int_B e^{i\langle\tilde{T}x, \tilde{T}y\rangle} p_1(dy) = \int_B e^{i\langle T\tilde{T}x, y\rangle} p_1(dy) = e^{-\frac{1}{2}|T\tilde{T}x|^2} = e^{-\frac{1}{2}\|\tilde{T}x\|^2}.$$

简洁起见, 我们用  $\hat{T}$  来表示  $i \circ \tilde{T}$ , 其中  $i: H \rightarrow B$  是嵌入映射. 那么

$$\int_B e^{i\langle\langle x, y \rangle\rangle} \tilde{\mu}(dy) = e^{-\frac{1}{2}\|\tilde{T}x\|^2}.$$

因此  $\tilde{\mu}$  是  $B$  上的高斯测度. 由普罗霍洛夫定理 [10, 定理 3],  $\hat{T}$  是具有有限迹的全连续自伴算子, 因而是希尔伯特-施密特算子. 最后, 令  $\{e_n\}$  是  $B$  的一组规范正交基, 那么  $\{\tilde{T}e_n\}$  是  $H$  的规范正交基. 但是

$$\sum |T(\tilde{T}e_n)|^2 = \sum \|\tilde{T}e_n\|^2 = \sum \|\hat{T}e_n\|^2 < \infty.$$

因此  $T$  也是希尔伯特-施密特算子.

如果我们将高斯测度的定义 (63) 式与 (66) 式中的  $\mu$  替换成

$$\mu_t = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \right)^n \int_A e^{-\frac{|x|^2}{2t}} dx,$$

$\mu_t$  称作  $H$  上具有参数  $t$  的高斯测度. 相应地, 定义在  $R_B$  上的测度  $\tilde{\mu}$  替换成  $\tilde{\mu}_t$ , 同样的证明说明了  $\tilde{\mu}_t$  是可数可加的. 它在博雷尔  $\sigma$ -代数上的延拓记为  $p_t$ , 称作具有方差  $t$  的维纳测度. 回忆  $B'$  在  $H$  中稠密 (留给读者验证.), 如果  $z \in B', z \neq 0$ , 那么

$$p_t\{x \in B : \langle x, z \rangle < a\} = p_t\left\{x \in B : \left\langle x, \frac{z}{|z|} \right\rangle < \frac{a}{|z|}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}|z|^2} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{u^2}{2t|z|^2}} du.$$

因此  $z \in B'$  关于  $p_t$  服从均值为 0, 方差为  $t|z|^2$  的正态分布. 我们得到了一个稠定算子  $n : H \rightarrow L^2(B, p_t)$ . 而且在相差常数因子  $t$  的意义下  $n$  是一个等距映射. 依连续性我们将  $n$  延拓至  $H$ , 于是对任意  $h \in H$ ,  $\langle h, \cdot \rangle$  在  $B$  上关于  $p_t$  几乎处处有定义.  $\langle h, \cdot \rangle$  服从均值为 0, 方差为  $t|h|^2$  的正态分布. 不仅如此, 可分巴拿赫空间上的高斯测度都可以通过这样的方式构造出来, 这称作高斯测度的结构定理 [8, 定理 4.4].

上面的讨论都是针对实线性空间的, 对于复的情形只需要考虑  $H$  的复化  $H_{\mathbb{C}} \cong H \times \mathbb{C}$ , 得到的结果是完全类似的. 接下来的讨论亦是如此. 我们再来看

$$\mathcal{H}_n = \left\{ \langle : x^{\otimes n} :, f \rangle : f \in H^{\widehat{\otimes} n} \right\}. \quad (69)$$

那么  $\mathcal{H}_n$  是  $\mathcal{Q}_n$  在  $L^2(E', \mu)$  中张成的闭子空间, 其上的一组基由下式给出

$$\langle : x^{\otimes |\alpha|} :, e_0^{\alpha_0} \widehat{\otimes} e_1^{\alpha_1} \widehat{\otimes} \cdots \rangle, \quad |\alpha| = n.$$

如果乘上归一化因子  $\alpha!^{-\frac{1}{2}}$ , 那么

$$\phi_{\alpha}(x) = \alpha!^{-\frac{1}{2}} \langle : x^{\otimes |\alpha|} :, e_0^{\alpha_0} \widehat{\otimes} e_1^{\alpha_1} \widehat{\otimes} \cdots \rangle,$$

$\alpha$  遍历所有求和有限的可列无穷自然数指标, 就构成了  $L^2(E', \mu)$  的一组规范正交基. 因而平方可积的高斯空间具有如下分解

$$L^2(E', \mu) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n. \quad (70)$$

上式称作抽象的维纳-伊藤分解. 下面我们来证明分解式 (70).

由分解式 (59) 和正交关系式 (61) 只需要证明  $\mathcal{P}$  在  $L^2(E', \mu)$  中稠. 假设  $\phi \in L^2(E', \mu)$  正交于  $\mathcal{P}$ , 那么我们能够在  $E$  中选取一组标准正交基  $\{e_n\}$  使得

$$\int_{E'} \phi(x) \langle x, e_1 \rangle^{p_1} \cdots \langle x, e_n \rangle^{p_n} \mu(dx) = 0 \quad (71)$$

无论  $p_1, \dots, p_n$  以及  $n$  如何选择都是如此. 如果记  $\mathcal{B}$  为  $E'$  上柱集生成的  $\sigma$ -代数, 即使得  $\mathcal{P}$  可测的最小  $\sigma$ -代数, 而  $\mathcal{B}_n$  为使得

$$x \mapsto (\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle) \in \mathbb{R}^n$$

可测的最小  $\sigma$ -代数. 那么

$$\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \cdots, \quad \mathcal{B} = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n.$$

设  $P_n$  是  $L^2(E', \mathcal{B}, \mu)$  到  $L^2(E', \mathcal{B}_n, \mu)$  的正交投影. 依定义, 在强算子范数的意义下  $P \uparrow I$ , 即:

$$\lim \|P_n \phi - \phi\| = 0, \quad \phi \in L^2(E', \mathcal{B}, \mu). \quad (72)$$

另一方面, 由 (71) 式

$$\int_{E'} P_n \phi(x) \langle x, e_1 \rangle^{p_1} \cdots \langle x, e_n \rangle^{p_n} \mu(dx) = 0. \quad (73)$$

因为  $P_n \phi$  是  $\mathcal{B}_n$ -可测的, 于是存在可测函数  $f_n$  使得

$$P_n \phi(x) = f_n(\langle x, e_1 \rangle \cdots \langle x, e_n \rangle).$$

而且  $f_n$  是关于  $\mathbb{R}^n$  上的高斯测度是平方可积的. 考虑到 (73) 我们有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{E'} f_n(\langle x, e_1 \rangle \cdots \langle x, e_n \rangle) \langle x, e_1 \rangle^{p_1} \cdots \langle x, e_n \rangle^{p_n} \mu(dx) \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t_1, \dots, t_n) t_1^{p_1} \cdots t_n^{p_n} e^{-(t_1^2 + \cdots + t_n^2)/2} dt_1 \cdots dt_n. \end{aligned}$$

而  $t_1^{p_1} \cdots t_n^{p_n}, p = (p_1, \dots, p_n), |p| = 0, 1, 2, \dots$  构成了平方可积高斯空间上的一组基, 于是  $f_n = 0$ , 也就是  $P_n \phi(x) = 0$ . 因而由 (72) 式  $\phi = 0$ .

希尔伯特空间  $H$  的对称 (或反对称) 张量积  $\Gamma_\alpha(H)$  称作福克空间

$$\Gamma_\alpha(H) = \text{Exp}_\alpha H = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus (H^{\otimes n})_\alpha, \quad \alpha = s, a.$$

其中  $\sum \oplus$  代表直接正交和.  $(H^{\otimes n})_s$  代表  $H$  的  $n$  重对称张量积, 因而  $\Gamma_s(H)$  称作对称福克空间, 又称作玻色福克空间; 相应地,  $(H^{\otimes n})_a$  代表  $H$  的  $n$  重反对称张量积, 因而  $\Gamma_a(H)$  称作反对称福克空间, 又称作费米福克空间. 那么 (69) 式和 (70) 式说明了对任意  $\phi \in L^2(E', \mu)$ , 存在唯一的  $\{f_n\} \in \Gamma_s(H)$  使得

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle : x^{\otimes n} :, f_n \rangle, \quad (74)$$

在  $L^2$  意义下收敛. 反过来, 对任意  $\{f_n\} \in \Gamma_s(H)$ , (74) 定义了一个  $L^2(E', \mu)$  中的函数, 此时

$$\|\phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |f_n|^2.$$

简而言之, 我们有

$$L^2(E', \mu) \cong \Gamma_s(H). \quad (75)$$

这就是维纳-伊藤分解在福克表象下的形式.

下面我们来看一个例子. 令  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$  是高斯空间,  $\mathcal{P}$  为由全体实系数多项式构成的集合. 那么  $\mathcal{P}$  在  $L^2(\mathbb{R}, \mu)$  中稠密. 在  $\mathcal{P}$  上定义微分算符和它的共轭

$$\partial = \frac{d}{dx}, \quad \partial^* = -\frac{d}{dx} + x,$$

粒子数算符为它们的乘积

$$\partial^* \partial = -\frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx}.$$

由分部积分公式, 对任意  $f, g \in \mathcal{P}$ , 我们有

$$(\partial f, g) = (f, \partial^* g).$$

因此  $\partial, \partial^*$  和  $\partial^* \partial$  能够延拓成  $L^2(\mathbb{R}, \mu)$  上的闭算子使得  $\partial$  和  $\partial^*$  彼此共轭并且  $\partial^* \partial$  是自伴的. 由埃米特多项式的性质,  $H_n$  是  $\partial^* \partial$  的特征函数

$$\partial^* \partial H_n = n H_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

并且具有递归性质

$$H_{n+1} = \partial^* H_n,$$

因此

$$H_{n+1} = (\partial^*)^n 1.$$

现在令  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty, \mu^\infty)$  是高斯空间  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$  的可列无穷乘积. 对任意自然数  $j$ , 记  $\partial_j$  与  $\partial_j^*$  分别为对第  $j$  个分量求偏导的微分算符与它的共轭, 由此定义无穷维的奥恩斯坦-乌伦贝克算符

$$L = - \sum_{j=1}^{\infty} \partial_j^* \partial_j.$$

类似地, 我们有

$$H_\alpha = \partial_\alpha^* 1,$$

其中  $H_\alpha = \prod H_{\alpha_j}(x_j)$ ,  $\alpha$  只有有限多个分量非零, 是  $L$  的特征函数

$$LH_\alpha = -|\alpha|H_\alpha.$$

考虑指标集  $\Lambda = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Lambda_n$ ,  $\Lambda_n = \{\alpha \in \mathbb{N}^\infty : |\alpha| = n\}$  和平方可积函数空间中由  $n$  次埃米特多项式  $\{H_\alpha : \alpha \in \Lambda_n\}$  生成的闭子空间  $\mathcal{H}_n$ . 我们有下面的正交分解

$$L^2(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty, \mu^\infty) = \bigotimes_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n.$$

这是  $\dim H = \infty$  的情形. 如果我们考虑更简单的情形, 即  $\dim H = n$ . 此时  $H \cong (\mathbb{C}^n)^*$ . 固定  $H$  上的一组基  $e_1, e_2, \dots, e_n$  为  $\mathbb{C}^n$  上的坐标函数. 我们看到  $H^{\otimes k}$  与  $\mathbb{C}^n$  上的  $k$ -阶齐次多项式一一对应

$$e_1^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_n^{\alpha_n} \longleftrightarrow \sqrt{\frac{\pi^k}{k!}} z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n} = \sqrt{\frac{\pi^k}{k!}} z^\alpha, \quad |\alpha| = k.$$

或者换句话说, 将上式左端记作  $E_\alpha \in \Gamma_s(H)$ , 注意到上式右端是  $e_\alpha$ , 于是  $E_\alpha \mapsto e_\alpha$  明确地定义了一个从福克空间  $\Gamma_s(H)$  到西格-巴格曼空间  $\mathcal{F}_n$  的西算子. 我们还可以定义湮灭算符与产生算符如下

$$A_j E_\alpha = \sqrt{\alpha_j} E_{\alpha - 1_j}, \quad A_j^* E_\alpha = \sqrt{\alpha_j + 1} E_{\alpha + 1_j},$$

不难验证它们具有以下形式, 比如说, 产生算符

$$A_j^* \left( \sum_0^\infty v^{(k)} \right) = \sum_0^\infty \sqrt{k+1} e_j \otimes v^{(k)}, \quad v^{(k)} \in H^{\otimes k}. \quad (76)$$

对任意  $u \in H$  将上 (76) 式中的  $e_j$  替换为  $u$ , 我们还能定义更一般的产生算符  $A_u^*$  和它的共轭  $A_u$ , 它们分别将  $k$ -粒子态映射为  $k+1$  粒子态和  $k-1$  粒子态.

## 参考文献

- [1] Valentine Bargmann, *On a hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, part i and ii*, Communications on pure and applied mathematics **14**, **20** (1961, 1967), no. 3, 1, 187–214, 1–101.
- [2] Robert H. Cameron and William T. Martin, *Transformations of weiner integrals under translations*, Annals of Mathematics (1944), 386–396.
- [3] Paul A. M. Dirac, *The principles of quantum mechenics*, Oxford University Press, USA, 1982, 中译本: 量子力学原理. 机械工业出版社, 2018. 凌东波译.
- [4] Vladimir Fock, *Konfigurationsraum und zweite quantelung*, Zeitschrift für Physik **75** (1932), no. 9-10, 622–647.
- [5] Gerald B. Folland, *Harmonic analysis in phase space*, no. 122, Princeton university press, 1989.
- [6] Leonard Gross, *Abstract wiener spaces*, Proc. 5th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob., Vol. II, Univ. California Press, 1967, pp. 31–43.
- [7] Kiyosi Itô, *Multiple wiener integral*, Journal of the Mathematical Society of Japan **3** (1951), no. 1, 157–169.
- [8] Hui-Hsiung Kuo, *Gaussian measures in banach spaces*, Springer, 2006.
- [9] Nobuaki Obata, *White noise calculus and fock space*, Springer, 2006.
- [10] Yu V. Prohorov, *The method of characteristic functionals*, Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob., Vol. II, Univ. California Press, 1961, pp. 403–419.
- [11] Irving E. Segal, *Mathematical problems of relativistic physics*, American Mathematical Soc., 1963.
- [12] Norbert Wiener, *The homogeneous chaos*, American Journal of Mathematics **60** (1938), no. 4, 897–936.