带球谐多项式展开的奇点与应用

王浩铭

中山大学

2025 年 1 月 9 日

2024 中国复分析会议, 深圳, 广东

带球谐函数

一曰北辰, 天之最尊星也. 其纽星天之枢也. 天运无穷, 而极星不移. 故曰:" 居其所而众星拱之."
——《易: 系辞上》

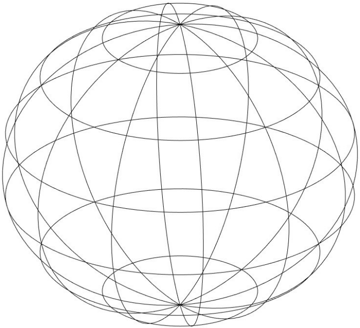

图: Zonal Polynomial on S^2.

鸽巢原理

近世士大夫多喜谭命，往往自能推步，有精绝者．予尝见人言，日者阅人命，盖未始见年、月、日、时同者，纵有一二，必倡言于人以为异．尝略计之，若生时无同者，则一时生一人，一日当生十二人．以岁计之，则有四千三百二十人，以一甲子计之，止有二十五万九千二百人而已．今祇以一大郡计其户口之数，尚不减数十万．况举天下之大，自王公大人以至小民，何啻亿兆？虽明于数者，有不能历算，则生时同者，必不为少矣．其间王公大人始生之时，则必有庶民同时而生者，又何贵贱贫富之不同也？此说似有理，予不晓命术，姑记之，以俟深于五行者折衷焉．
——宋·费衮《梁溪漫志：谭命》

鸽巢原理

- 使五鸽入四笼, 则必一笼有两鸽.

2	1	1	1

, 共一种情况.

- 使 $n+1$ 鸽入 n 笼, 则必一笼有两鸽.

2	1	$\cdots$	1	1

, 共一种情况.

- 使 n 鸽入 m 笼 $(n \geq m)$, 则何如?

杨图

$\lambda = (5, 4, 2, 2)$

$$\begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 \\ 12 & 13 \end{ytableau}$$

$/$

$\mu = (2, 1)$

$$\begin{ytableau} 1 & 2 \\ 3 \end{ytableau}$$

$\|$

λ/μ

$$\begin{ytableau} \none & \none & 1 & 2 & 3 \\ \none & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{ytableau}$$

1954 年, 策果证明了满足如下条件

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1$$

在单位圆盘上关于勒让德多项式 L_n 的级数

$$a_0 + a_1 r L_1(\cos\theta) + a_2 r^2 L_2(\cos\theta) + \dots$$

与关于 $z = re^{i\theta}$ 的单复变级数

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

在 $r = |z| = 1$ 上具有相同的极点, $r = |z| < 1$ 内是解析的.

勒让德展开 II

两年后，内哈里对策果的定理作出了改进，证明了满足如下条件

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \rho^{-1}$$

在椭圆边界内勒让德多项式 L_n 关于复变元 t 的级数

$$a_0 + a_1 L_1(t) + a_2 L_2(t) + \ldots, \quad |t+1| + |t-1| < \rho + \rho^{-1}$$

与单复变级数

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \quad |z| < \rho^{-1}$$

的极点满足关系式

$$z_0 = \frac{1}{2}(t_0 + t_0^{-1}), \quad t_0 \neq \pm 1$$

而策果的定理正是它的极限情形.

勒让德展开 III

径向函数是局部可积函数在单位球面上的径向积分

$$\varphi(x) = \frac{1}{\omega_{d-1}} \int_{S^{d-1}} f(rx')dx', \quad r = |x|, x' = x/r(x \neq 0)$$

当 $d = 2$ 时, 令 $x + iy = re^{i\theta}$, 径向函数 $\varphi(re^{i\theta})$ 具有傅里叶级数

$$\varphi(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k(r)e^{ik\theta}$$

其中每一项都分解为了径向部分和角度部分的乘积. 当 $d > 2$ 时, 球谐函数扮演了角度部分的基底角色. 比如勒让德展开, $|x| = r, |x_0| = 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\theta + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos\theta)$$

就可以用来表示欧氏空间两个具有夹角 θ 的向量 x 与 x_0 之间的距离.

盖根堡展开 I

一般的，调和多项式是满足拉普拉斯方程 $\Delta f = 0$ 的多项式，球谐多项式是其在单位球面 S^{d-1} 上的限制．固定 S^{d-1} 中的一个点 x，让我们考虑定义在全体次数为 k 的齐次球谐多项式空间上的线性泛函

$$L_x(f) = f(x)$$

由李斯表示定理，必存在唯一的次数为 k 的齐次球谐函数 $Z_x^{(k)}(y)$ 使得

$$L_x(f) = \int_{S^{d-1}} Z_x^{(k)}(y) f(y) dy$$

则 $Z_x^{(k)}(y)$ 称作以 x 为极的 k 阶带球谐函数，悉知带球谐函数与盖根堡多项式 $P_k^{(n-2)/2}(x \cdot y)$ 在仅相差一常数倍的意义下相同，且

$$(1 - 2xt + t^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{\lambda}(x) t^n$$

盖根堡展开 II

1966 年, 吉尔伯特和霍华德验证了类似的展开结果, 其基函数是斯图姆-刘维尔方程的解. 随后, 1980 年扎耶德将带调和展开推广到盖根堡或超球展开. 1998 年, 埃本费尔特等人研究了它们与偏微分方程的联系, 并将它们推广至单复变雅可比多项式. 既然多复变雅可比多项式作为勒让德多项式的自然推广, 那么问题是在典型域上是否也有类似的结果?

典型域 I

- 上世纪 60 年代, 华罗庚和詹姆斯研究了典型域上的带球谐多项式. 假设 $\mathfrak{R}_{\text{II}}$ 是复对阵 $n \times n$ 矩阵全体, $I - Z\bar{Z} > 0$, $\mathfrak{C}_{\text{II}}$ 是典型域 $\mathfrak{R}_{\text{II}}$ 的特征流形, 由对称 $n \times n$ 酉矩阵全体, $I - Z\bar{Z} = 0$ 组成.
- 对典型域 $\mathfrak{R}_{\text{II}}$ 中的矩阵 S, 我们把它排成长度为 $n(n+1)/2$ 的向量

$$
\begin{aligned}
s = \Big(& s_{11}, \sqrt{2}s_{12}, \sqrt{2}s_{13}, \ldots, \sqrt{2}s_{1n}, s_{22}, \sqrt{2}s_{23}, \ldots \\
& \ldots, \sqrt{2}s_{2n}, \ldots, s_{n-1,n-1}, \sqrt{2}s_{n-1,n}, s_{nn} \Big)
\end{aligned}
$$

- 通过合同变换 $T = USU'$, 向量 s 通过线性变换被映射为向量 t, 该线性变换的矩阵为 $U^{[2]}$, 维度为 $n(n+1)/2$.
- 再构造长度为 $\frac{(n(n+1)/2+f-1)!}{f!(n(n+1)/2-1)!}$ 的向量 $s^{[f]}$, $s^{[f]}$ 的各个分量是 s_{ij} 的多项式, 且次数为 f. 这些分量是线性无关的, 任何 f 次的齐次多项式都可以表示为这些分量的线性组合. 此时变换矩阵为 $\left(U^{[2]}\right)^{[f]}$.

典型域 II

- 已知 s_{ij} 的齐次多项式空间在 $(U^{[2]})^{[f]}$ 变换下可以分解为酉不变子空间的直和. 这些子空间的维度为 $N(2f_1,\ldots,2f_n)$, 其中 $f_1+\cdots+f_n=f$. 我们将生成 $N(2f_1,\ldots,2f_n)$ 维子空间的多项式记为 $\varphi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}(S), i=1,2,\ldots,N(2f_1,\ldots,2f_n)$
- 当 S 通过合同变换映射为 T 时, $\varphi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}(S)$ 会通过矩阵 $A_{2f_1,\ldots,2f_n}(U)$ 被映射为 $\varphi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}(T)$. 此外, 这些多项式在 $\mathfrak{R}_{\text{II}}$ 上是正交的, 即

$$\int_{\mathfrak{R}_{\text{II}}} \varphi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}(S)\overline{\varphi^{(j)}_{g_1,\ldots,g_n}(S)}\dot{S} = \delta_{ij}\delta_{fg}\rho_f$$

- $\mathfrak{R}_{\text{II}}$ 上关于划分 $(f_1,\ldots,f_n)$ 的带多项式定义为

$$\varPhi_{f_1,\ldots,f_n}(S,\bar{T}) = \sum_i \varphi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}(S)\overline{\varphi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}(T)}$$

典型域 III

定理 1 (华罗庚, 1958)

1. $\displaystyle\sum_{f=0}^{\infty}\sum_{f_1\geq\cdots\geq f_n\geq 0}\Phi_{f_1,\ldots,f_n}(U,\bar{U})r^f \rightrightarrows \frac{1}{V(\mathfrak{C})}(1-r)^n$ 对 $0\leq r\leq r_0<1$.
2. $\displaystyle\sum_{f=0}^{\infty}\sum_{f_1\geq\cdots\geq f_n\geq 0}\Phi_{f_1,\ldots,f_n}(Z,\bar{U})r^f \rightrightarrows H_r(Z,\bar{U})$ 对 $0\leq r\leq r_0<1$.
3. 在可缩区域 $\mathfrak{R}$ 及其边界 $\mathfrak{C}$ 上的任意解析函数 $F(z)$, 都能在真闭子域 $\mathfrak{R}'\subseteq\mathfrak{R}$ 上展开为一致收敛的级数 $F(Z)=\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\varphi_\nu(Z)$.
4. (柯西积分公式). 对任意 *3* 中的 F, $F(Z)=\displaystyle\int_{\mathfrak{C}}H_1(Z,\bar{U})f(U)\dot{U}$.
5. (泊松核). $P(Z,U)=\dfrac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{II}})}\dfrac{|I-Z\bar{Z}'|^{\frac{n+1}{2}}}{|I-Z\bar{U}'|^{n+1}}$, $r=|Z|<1, U\in\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}$.

雅可比展开

定理 2 (策果, 1954, 内哈里, 1956)

如果

$$\limsup_{f\to\infty} |a_f|^{1/f} = \rho^{-1} < 1.$$

那么关于雅可比多项式 $\Phi_f(t_1,\ldots,t_n)$ 的级数, $t_i \neq \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$\sum_{f=0}^{\infty} \sum_{f_1\geq\cdots\geq f_n\geq 0} a_f \Phi_f, \quad |t_i+1|+|t_i-1| < \rho+\rho^{-1} \tag{1}$$

与关于单项式的多复变级数, $z^{[f]} = z_1^{f_1}\ldots z_n^{f_n}$

$$\sum_{f=0}^{\infty} a_f \sum_{\text{取遍}z\text{的所有置换}} z^{[f]}, \quad |z_i| < \rho^{-1} \tag{2}$$

的极点 $(t_1,\ldots,t_n)$ 与 $(z_1,\ldots,z_n)$ 满足关系式 $t_i = \frac{1}{2}(z_i + z_i^{-1})$.

证明

证明.

令 $1<\rho_0<\rho$, $K(t,z)=\sum_{f=0}^{\infty}\Phi_f(t)\sum z^{-f}$. 由哈托格次定理, $K(t,z^{-1})$ 可以延拓为给定区域上的全纯函数. 此外, $K(t,z^{-1})$ 在 z_i-平面中从原点向外移动的第一个奇异点集具有形式 $\{z^2-2zt+1=0\}$. 于是

$$F(t)=\oint_{|z_1|=\rho_0}\cdots\oint_{|z_n|=\rho_0}K(t,z)G(z)\frac{dz}{z}$$

$$G(z)=\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}K(t,z^{-1})F(t)dt$$

1. 如果 $G(z)$ 在 $z=a$ 处 $(|a|=1/\rho)$ 具有奇点, 那么在紧椭圆 $|z+1|+|z-1|\leq\rho+1/\rho$ 内, $F(t)$ 在所有点 $t\neq\frac{1}{2}(a+1/a)$ 上是解析的.
2. 如果 $F(t)$ 在上述椭圆边界上的某个点 $t=\sigma(\sigma=\frac{1}{2}(a+1/a))$ 处具有奇点, 那么 $G(z)$ 在所有满足 $|z|=|a|$ 的点 $z\neq a$ 上是解析的.

带球谐函数 I

我们已经知道定义在对称矩阵空间上的带球谐函数是在正交矩阵的合同作用下不变的一组多项式

$$\Phi.(HSH', H\bar{T}H') = \Phi.(S, \bar{T}) = \Phi.(S\bar{T})$$

但华罗庚并未能给出这些多项式的具体计算方法. 这在华罗庚《多复变函数论中典型域上的调和分析》一书中称作是几乎不可能的. 1965 年, 津村通过分解正交矩阵为基础旋转矩阵的初等办法给出了带球谐函数关于单项式的精确表达式. 三年后, 詹姆斯才使用拉普拉斯方程给出了这些系数应满足的递推关系. 事实上, 津村主要考察了如下关系式

$$\int_{O(n)} \Phi.(AHBH')(dH) = \frac{\Phi.(A)\Phi.(B)}{\Phi.(I_n)}$$

其中带球谐函数满足归一化条件

$$[\operatorname{tr} A]^f = \sum_{f_1 \geq \cdots \geq f_n \geq 0} \Phi_{f_1,\ldots,f_n}(A)$$

带球谐函数 II

定理 3 (津村, 1965)

如果带球谐函数 $\Phi_{f_1,\dots,f_n}(Z)$ 关于 Z 的全体特征值 $z_1,\dots,z_n$ 具有和式

$$\sum_{g\le f} b_{f,g} \sum_{\text{取遍}z\text{的所有置换，下同}} z_1^{f_1}\dots z_n^{f_n} (= z^{[f]})$$

并且 $[\mathrm{tr}\,\mathrm{diag}(\beta_i)Q\,\mathrm{diag}(l_i)Q']^f$ 关于正交矩阵 Q 的积分也具有和式

$$\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{II}})}\int_{\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}} \left[\mathrm{tr}\,\mathrm{diag}(\beta_i)Q\,\mathrm{diag}(l_i)Q'\right]^f (dQ) = a_{f;f}\sum \beta_1^f \sum l_1^f + a_{f;f-1,1}\left[\sum \beta_1^f \sum l_1^{f-1}l_2 + \sum \beta_1^{f-1}\beta_2 \sum l_1^f\right] + \dots$$

那么存在 c_n 使得 $a_{f;g}/c_n = b_{f;g}$ 且两者都不含 n. 如果再假设对任意 $g \le f$ 都有 $b_{g;1^f} = f!$, 则这些系数是唯一确定的.

带球谐函数 III

证明.

存在性. 假设存在整数 t 使得 $h \le f$ 对

$$h_1 = g_1 \ge \cdots \ge h_i = g_i + t \ge \cdots \ge h_j = g_j - t \ge \cdots \ge h_n = g_n$$

和某些 i, j 成立. 我们定义 $A_f = \sum_{i=1}^n f_i^2$ 与 $B_f = \sum_{i=1}^n i f_i$,

$$b_{f,g} = \sum b_{f,h} \frac{g_i - g_j + 2t}{A_f - A_g + B_g - B_f},$$

和式遍历所有 $i, j, t = 1, 2, \ldots, (l_{i-1} - l_i) \wedge (l_j - l_{j+1})$. 除上公因子 $(n + 2f - 2)!!/(n-2)!!$, 于是得到了 a 的递推公式.
唯一性. 归一化条件确保所有划分均可进行上述操作. $\square$

应用 I: 单复变整函数

- 考察整函数 $f_p(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!\Gamma(m+p)}$.

定理 4 (莱塔克, 威所罗夫斯基, 2008)

设实值随机变量 (X_1, X_2) 与 (Y_1, Y_2) 独立, 且满足

$$E(X|X+Y) = a(X+Y), \quad E(X_i^2|X+Y) = b(X_i+Y_i)^2, i = 1, 2.$$

那么对 $p = \frac{a^2-ab}{b-a^2}$ 和 $a_1a_2 - a_{12} > 0$, X 具有密度函数

$$(\theta_1\theta_2 - 1)^p e^{\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2} \frac{1}{\Gamma(p)} (x_1x_2)^{p-1} f_p(x_1x_2), x_1, x_2 > 0,$$

其中 $\theta_1 = \frac{-a_2}{a_1a_2-a_{12}}$ 和 $\theta_1 = \frac{-a_1}{a_1a_2-a_{12}}$.

应用 II: 超几何函数

- 考察复级数 ${}_pF_q(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a_1)^m \ldots (a_p)^m}{(b_1)^m \ldots (b_q)^m} z^m$.

定理 5 (康斯坦丁, 1963)

设 Z 是 $n \times n$ 复对称矩阵, 其实部正定, Y 是任意 $n \times n$ 对称阵. 则超几何偏微分方程的一组解由带球谐函数给出

$$\int_{X>0} \operatorname{etr}(-XZ)|X|^{a-\frac{n+1}{2}} \Phi_f(XY)(dX) = (a)^f \Gamma_n(a)|Z|^{-a} \Phi_f\left(YZ^{-1}\right)$$

其中 $\Re(a) > \frac{1}{2}(n-1)$, $(a)^f$ 是上升阶乘幂. 因而

$${}_pF_q(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; X) = \sum_{f=0}^{\infty} \sum_{f_1 \geq \cdots \geq f_n} \frac{(a_1)^f \ldots (a_p)^f}{(b_1)^f \ldots (b_q)^f} \frac{\Phi_f(X)}{f!},$$

设 X 是 $m \times n$ 矩阵. 定义 $\psi(T) = E\exp(T \cdot X) = E\exp\left(i \sum t_{ij} x_{ij}\right)$ 为关于矩阵点乘的拉普拉斯变换. 安德森和方开泰定义球 (椭圆) 分布为

$$X \sim RS \Leftrightarrow X\Gamma \overset{d}{=} X, \Gamma \in O(n) \Leftrightarrow \psi(T) = \phi(TT')$$

$$X \sim MS \Leftrightarrow x_i P_i \overset{d}{=} x_i, P_i \in O(n) \Leftrightarrow \psi(T) = \phi(t_1 t_1', \ldots, t_m t_m')$$

$$X \sim VS \Leftrightarrow \mathrm{vec}(X)P \overset{d}{=} \mathrm{vec}(X), P \in O(mn) \Leftrightarrow \psi(T) = \phi(\mathrm{tr}(TT'))$$

其中 $T = (t_{ij}) = (t_1; \ldots; t_m)$ 是任意 $m \times n$ 矩阵. 对于 RS, MS, VS, 存在 $U_1 = (XX')^{-1}X$, $U_2 = (x_1/\|x_1\|; \ldots; x_m/\|x_m\|)$, $U_3 = X/\,\mathrm{tr}(XX')$ 使得 $X = AU_i$, 其中 A 与 U_i 独立. 对于坐标系 U_2, 求出其谱分解的具体形式在方开泰和张尧庭《广义多元分析》一书中被列为未解决的问题.

应用 III: 矩阵正态分布 II

定义 6

设 M 是 $m \times n$ 矩阵, A 和 B 分别是 $m \times m$ 和 $n \times n$ 正定对称阵. X 称作是矩阵正态分布 $N(m, n; M, A, B)$ 如果它具有概率密度

$$df_X(H) = (2\pi)^{-\frac{mn}{2}} \det(A)^{-\frac{n}{2}} \det(B)^{-\frac{m}{2}} \operatorname{etr}\left(-\frac{1}{2}A^{-1}HB^{-1}H'\right)(dH)$$

其中 $(dH) = \wedge_{i=1}^{m} \wedge_{j=1}^{n} dh_{ij}$, $H = (X - M)$.

定理 7

当 $n \geq m$ 时, XX' 的特征根 $l_1, \ldots, l_m$ 具有分布

$$\frac{\pi^{m^2/2} \det(L)^{(n-m-1)/2} \prod_{i<j}(l_i - l_j)}{2^{mn/2}\Gamma_m(\frac{1}{2}n)\Gamma_m(\frac{1}{2}m) \det(A)^{n/2} \det(B)^{m/2}} {}_0F_0(A^{-1}, LB^{-1})$$

更一般地, 我们需要卡夫宁-洛伊夫定理

定义 8 (T_1, $T_{1\frac{1}{2}}$, T_2 and T_3)

设 S, T 是欧氏空间的子集. 随机过程 $Z(s,t), s \in S, t \in T$ 称作是

- 如果存在 $L^2(T)$ 中的一组标准正交基 $\{\psi_i(t)\}$ 使得 $Z(s,t)$ 能够展开为均方收敛的级数

$$Z(s,t) = \sum_i \xi_i(s)\psi_i(t) \tag{T_1}$$

  其中 $\xi_i(s) = \int Z(s,t)\overline{\psi_i(t)}dt$, 且对任意 $i \neq i'$, $E\xi_i(s)\overline{\xi_{i'}(s)} = 0$.

- 如果 T_1 成立, 额外地, $\xi_i(\cdot)$ 两两不相关, 即对任意 $i \neq i', s_1, s_2 \in S$,

$$E\xi_i(s_1)\overline{\xi_{i'}(s_2)} = 0 \tag{$T_{1\frac{1}{2}}$}$$

应用 III: 卡夫宁-洛伊夫定理 II

定义 9 (续定义 T_1, $T_{1\frac{1}{2}}$, T_2 and T_3)

- 如果 T_1 成立, 并且进一步地存在 $L^2(S)$ 中的标准正交基 $\{\phi_j(s)\}$ 使得 $Z(s,t)$ 能够展开为均方收敛的级数

$$Z(s,t) = \sum_i \sum_j \eta_{ij}\phi_j(s)\psi_i(t) \tag{T_2}$$

  其中 $\eta_{ij} = \int\int Z(s,t)\overline{\phi_j(s)\psi_i(t)}dsdt$ 且 η_{ij} 两两无关, 即对任意 $i \neq i'$ 或 $j \neq j'$, $E\eta_{ij}\overline{\eta_{i'j'}} = 0$.

- 如果 T_2 成立, 并且存在随机变量列 λ_i, γ_j 使得 η_{ij} 满足

$$\eta_{ij} = \lambda_i\gamma_j \tag{$**$}$$

  其中 λ_i, γ_j 两两无关 $E\lambda_i\overline{\lambda_{i'}} = \sigma_i^2\delta_{ii'}, E\gamma_j\overline{\gamma_{j'}} = \tau_j^2\delta_{jj'}$, 且

$$E\eta_{ij}\overline{\eta_{i'j'}} = \sigma_i^2\tau_j^2\delta_{ii'}\delta_{jj'} \tag{T_3}$$

应用 III: 卡夫宁-洛伊夫定理 III

表: $T_1, T_{1\frac{1}{2}}, T_2$ 与 T_3 的比较.

T_1	$\Leftrightarrow$	$EZ(s,t_1)Z(s,t_2) = \sum_i c_i(s)\psi_i(t_1)\psi_i(t_2)$
	$\Leftrightarrow$	$\psi_i(t)$ 是 $C(s,t_1,s,t_2)$ 的特征函数, 与 s 无关.
$T_{1\frac{1}{2}}$	$\Leftrightarrow$	$EZ(s_1,t_1)Z(s_2,t_2) = \sum_i c_i(s_1,s_2)\psi_i(t_1)\psi_i(t_2)$
	$\Leftrightarrow$	$\psi_i(t)$ 是 $C(s_1,t_1,s_2,t_2)$ 的特征函数, 与 s_1, s_2 无关.
T_2	$\Leftrightarrow$	$EZ(s_1,t_1)Z(s_2,t_2) = \sum_i \sum_j c_{ij}\phi_j(s_1)\phi_j(s_2)\psi_i(t_1)\psi_i(t_2)$
	$\Leftrightarrow$	$c_{ij}, \phi_j(s)\psi_i(t)$ 是 $C(s_1,t_1,s_2,t_2)$ 的特征值与特征函数.
T_3	$\Leftrightarrow$	$EX(s_1)X(s_2) = \sum_j \tau_j^2\phi_j(s_1)\phi_j(s_2), \ldots = \sum_i \sigma_i^2\psi_i(t_1)\psi_i(t_2),$ $C(s_1,t_1,s_2,t_2) = (\sum_j \tau_j^2\phi_j(s_1)\phi_j(s_2))(\sum_i \sigma_i^2\psi_i(t_1)\psi_i(t_2)).$

特别地, $**$ 等价于存在 $X(s)$ 与 $Y(t)$ 使得

$$Z(s,t) = X(s)Y(t) \qquad (*).$$

T_1-T_3 是多元球分布 MS 的谱分解. 若 (*) 成立, 它还是向量球分布 VS.

参考文献

1. An explicit formula for zonal polynomials, arXiv:2410.13558.
2. Matrix normal distribution and elliptic distribution, arXiv:2410.14490.
3. On some diagonal forms of random series, preprint.

谢谢!