泊松可加过程的一些注记

王浩铭

中山大学

2024 年 11 月 10 日

第 13 届全国概率统计会议, 厦门, 福建

1937 年, 列维在他的专著 [7] 中引入了可加过程, 满足下面两条公理

1. 随机连续
$$\lim_{t \to s} \mathbf{P}(|X_t - X_s| > \varepsilon) \to 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{1}$$
2. 独立增量
$$X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \quad t_0 < t_1 < \cdots < t_n$$
相互独立.

霍克斯过程: 在微小时间增量 dt 内事件发生于 $(t, t+dt]$ 的概率
$$\lambda_t dt = \left(\mu(t) + \sum_{t_i : t_i < t} \phi(t - t_i) \right) dt,$$

其中 $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$ 是到达时间. 就不是严格意义上的可加过程 (不满足独立增量性质), 所以我们需要推广可加过程的定义.

(X_t, Y_t) 称作是二元条件可加过程, 如果它满足以下两条公理

1'. (X_t, Y_t) 是随机连续的.

2'. X_t 在 Y_t 给定的条件下具有独立增量.

大多数情况下我们所考虑的 Y_t 是依赖于 X_t 的, 称作自激励过程 (例如霍克斯过程, Y_t 取 $\int_0^t \lambda_s ds$). 特别的, 二元泊松过程定义为

- N_t 在绝对连续增过程 A_t 满足 $A(0) = 0$ 给定的条件下具有泊松律

$$\mathbf{P}(N_t = n \mid A_t) = \frac{A_t^n e^{-A_t}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{2}$$

- $N_{t_1} - N_{t_0}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ 在 A_t 给定的条件下相互独立.

这里的 A_t 称作 N_t 的平均强度.

证明纲要

我们的工作主要有四个部分:

I. 证明了泊松可加过程定义中的平均强度的存在唯一性.
II. 证明了 $\mathbf{P} \ll \mathbf{P}_0$ 时, 泊松可加过程的滤子是内禀的.
III. II 应用于霍克斯过程, $\mathbf{P} \ll \mathbf{P}_0$ 等价于 $\phi = const.$
IV. II 推广至维纳可加过程和马尔可夫可加过程.

历史发展 I

- 科克斯的定义: $M = \mu$ 的条件下, $N(E)$ 具有泊松律

$$\mathbf{P}(N(E) = n \mid M = \mu) = \frac{[\mu(E)]^n e^{-\mu(E)}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{3}$$

- 拉奥和鲁宾的定义: 如果观测是标记了的, damage=0 或 1

$$\mathbf{P}(N(E) = n \mid \text{damaged}) = \frac{[\lambda(E)]^n e^{-\lambda(E)}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{4}$$

- 布里莫的定义: 定义在实直线上泊松过程满足

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathbf{P}(N_{t+h} - N_t = 1 \mid \sigma(N_s : 0 \le s \le t)) = \lambda_t \tag{5}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathbf{P}(N_{t+h} - N_t = 0 \mid \sigma(N_s : 0 \le s \le t)) = 0 \tag{6}$$

历史发展 II

- 斯奈德的定义：自激励过程是一个过去的知识——包括在某时刻 t 以前发生的所有事件的数目 N_t 以及事件的到达时间 $T_1, \cdots, T_{N_t}$——能够对继 t 之后的所有事件的数目及其到达时间产生影响的计数/点过程.
- 现代鞅论的定义：可以将上述泊松过程的定义用现代条件期望的语言重写如下，将条件 1,2 中在 A_t 给定的条件下替换为关于滤子，即一族单调非减的 σ-代数 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{R}_+}$ 的条件期望，自然地我们要求

$$\sigma(A_t : t \in \mathbf{R}_+) \subseteq \mathscr{F}_0 = \bigcap_{t\in\mathbf{R}_+} \mathscr{F}_t$$

- 随机过程具有非预期性质，如果它的滤子 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 是内禀的，即 $\mathscr{F}_t = \sigma(N_s : 0 \leq s \leq t), \forall t \in \mathbf{R}_+$.
- 于是布里莫 [1] 猜想：不存在一个预期的自激励泊松过程关于标准泊松过程绝对连续. 我们将对这一猜想给出证明.

历史发展 III

- 1964 年渡边信三 [11] 和 1975 年布里莫 [2] 分别在 A_t 是勒贝格测度和绝对连续测度的情形证明了: N_t 是具有平均强度 A_t 的泊松过程等价于 $N_t - A_t$ 是鞅.

$$
\begin{aligned}
&E\{\exp(iu(N_t - N_s))\} \\
&= \prod_{\substack{s<u\le t \\ \Delta A(v)\neq 0}} (e^{iu}\Delta A(v) + (1-\Delta A(v)))\exp((e^{iu}-1)(A^c(t)-A^c(s)))
\end{aligned}
\tag{7}
$$

其中 $A^c(t)$ 代表 $A(t)$ 的绝对连续部分, $\Delta A(t) = A(t) - A(t-)$.

- 我们将要把这一定理推广到泊松可加过程, 其中平均强度 A_t 是满足适应性条件

$$\sigma(A_t : t \in \mathbf{R}_+) \subseteq \mathscr{F}_0 \tag{8}$$

可料的绝对连续增过程.

平均强度的唯一性 I

一个可测随机过程称作是 $\mathscr{F}_t$-可料的, 如果它关于如下 σ-代数可测:

$$\sigma\{B\times(s,t]: B\in\mathscr{F}_s, s\le t\}.$$

除特殊声明, 以下可料均假设为 $\mathscr{F}_t$-可料, 可测均假设为 $\mathscr{F}_t$-可测.

定理 2.1

假设 N_t 是点过程, 满足 $\mathbf{E}[N_t]<\infty$, A_t 是满足适应性条件 *(8)* 的可料增过程, 其勒贝格分解中奇异部分为零 $A_t^d=0$. 则以下六款等价:

1. N_t 是具有平均强度 A_t 的泊松可加过程.
2. $\mathbf{E}\{N_{t+h}-N_t|\mathscr{F}_t\}=A_t'h+o(h)$ *a.s.*
3. $\mathbf{E}\{\exp[iu(N_t-N_s)]\mid\mathscr{F}_s\}$ 具有形式 *(7)*.
4. $\mathbf{E}\left[\int_0^\infty C\,dN\right]=\mathbf{E}\left[\int_0^\infty C\,dA\right]$, 其中 C 是任意非负可料过程.
5. $\mathbf{E}\{N_t-A_t\mid\mathscr{F}_s\}=N_s-A_s$, 即 N_t-A_t 是鞅.
6. $N_{t\wedge S_n}-A_{t\wedge S_n}$ 是鞅, 其中 $S_n\uparrow\infty$ *a.s.* 是停时.

证明.

1 $\Leftrightarrow$ 2 $\Leftrightarrow$ 3. 略. 1 $\Leftrightarrow$ 4. 依定义验证.
6 $\Rightarrow$ 3. 利用鞅和性质 (8), 该问题等价于求解如下常微分方程

$$\begin{cases} \frac{dy_t}{dt} = (e^{iu} - 1)A'_t y_t, & t > s, \\ y_s = 1, & t = s. \end{cases} \tag{9}$$

该方程具有解 (7).
6 $\Rightarrow$ 5 $\Rightarrow$ 4. 对任意停时列 $S_n \uparrow \infty$ a.s. 和可料集 Λ

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(N_{t\wedge T_n} - N_{s\wedge S_n}); \Lambda] &= \mathbf{E}\left[\int_0^T C_u dN_{u\wedge S_n}\right] \\ &= \mathbf{E}\left[\int_0^T C_u dA_{u\wedge S_n}\right] = \mathbf{E}[(A_{t\wedge T_n} - A_{s\wedge S_n}); \Lambda], \end{aligned} \tag{10}$$

由单调类定理保证. 同样的方法也适用于 4 $\Rightarrow$ 6. $\square$

平均强度的存在性 I

设 N 是实直线上的点过程, 那么它具有以下形式

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} 1(T_n < t), t > 0, \quad N_0 = 0,$$

其中 $T_n = \sup\{t : N_t < n\} = \inf\{t : N_t \geq n\}$.

定理 3.1

对任意 n, 令 $F_n(\omega, du)$ 为在给定 $\mathscr{F}_{T_n}$ 的条件下 $U_{n+1} = T_{n+1} - T_n$ 的正则条件分布, 即: $F_n(\omega, du) = P\{U_{n+1} \in du | \mathscr{F}_{T_n}\}(\omega)$. 定义增函数

$$A_t^{(n)} = \int_0^{t-T_n} \frac{F_n(dx)}{1 - F_n(x-)}, t \in (T_n, T_{n+1}], \text{在其余 } t \text{ 处取常数.}$$

其中那么 $A_t = \sum_{n=0}^{\infty} A_t^{(n)}$ 是 N_t 的平均强度.

平均强度的存在性 II

断言 1

设 $T_1 \le T_2 \le \dots T_n$ 是点过程 N_t 的到达时, T 是任意停时.

$$\sigma\left(N_{T_n \wedge s} : s \ge 0\right) = \sigma(T_1, \dots, T_n),$$

$$\sigma\left(N_{T \wedge s} : s \ge 0\right) \cap \{T_n \le T < T_{n+1}\} = \sigma\left(N_{T_n \wedge s} : s \ge 0\right) \cap \{T_n \le T < T_{n+1}$$

断言 2

设 T 是 $\sigma\left(N_s : 0 \le s \le t\right)$-停时. 对任意 n, 存在 $\sigma\left(N_{T_n \wedge s} : s \ge 0\right)$-随机变量 R_n 使得 $T \wedge T_{n+1}$ 与 $(T_n + R_n) \wedge T_{n+1}$ 在集合 $\{T_n < T\}$ 上相等.

证明.

取 $R_n = [g_n(T_1, \dots, T_n) - T_n]_+$, 其中 $g_n = T$ 当 $\{T_n < T < T_{n+1}\}$. $\square$

平均强度的存在性 III

定理 3.2

设点过程 N 关于 $(\boldsymbol{\Omega}, \mathscr{F}_\infty)$ 上的两个概率测度 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{P}'$ 具有相同的平均强度 A. 如果 $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{P}'$ 在 $\mathscr{F}_0$ 相等, 那么他们在 $\mathscr{F}_\infty$ 上也相等.

证明.

如果 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{P}'$ 在 $\mathscr{F}_\infty$ 上不相等, 那么存在 n 使得 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{P}'$ 在 $\mathscr{F}_{T_n}$ 上相等, 却在 $\mathscr{F}_{T_{n+1}}$ 上不相等. 假设 $F(0)$ 给定, 我们有

$$H \mapsto F(t) = \int_0^t H(ds)H[s, \infty]$$

定义出从 $[0, \infty]$ 上所有概率测度集到 $[0, \infty]$ 上的所有右连续增函数集上的双射, 但这与断言 2 矛盾. □

似然比公式 I

定理 4.1

设 N_t 是具有 $\sigma(N_s : 0 \leq s \leq t)$-瞬时强度 λ_t 的泊松可加过程. 假设 $\mathbf{P}_0$ 是 $(\mathbf{\Omega}, \mathscr{F}_\infty)$ 上的概率测度, N_t 关于 $\mathbf{P}_0$ 是具有常数强度 1 的平稳泊松过程. 那么 $\mathbf{P} \ll \mathbf{P}_0$ 并且对于任意 t,

$$d\mathbf{P}/\mathbf{P}_0|_{\sigma(N_s:0\leq s\leq t)} = \exp\{\int_0^t (1-\lambda_s)ds + \int_0^t \log \lambda_s dN_s\} \tag{11}$$

反过来, 如果 $\mathbf{P}_0$ 如上定义而 $\mathbf{P}$ 是 $(\mathbf{\Omega}, \mathscr{F}_\infty)$ 上满足 $\mathbf{P} \ll \mathbf{P}_0$ 的概率测度, 那么存在 $\sigma(N_s : 0 \leq s \leq t)$-可料过程 λ_t 使得 λ_t 是 N_t 关于 $\mathbf{P}$ 的瞬时强度.

注

非负可料过程 λ_t 称作是泊松过程 N_t 瞬时强度, 如果 $A_t = \int_0^t \lambda_s ds$.

似然比公式 II

充分性.

注意到 (11) 式右端定义的 Z_t 是 $\mathbf{P}_0$-鞅, 往证对任意有界可料过程 C_t 和 $d\mathbf{P}' = Z_t d\mathbf{P}_0$

$$\mathbf{E}'\left[\int_0^t C_s dN_s\right] = \mathbf{E}'\left[\int_0^t C_s \lambda_s ds\right] \tag{12}$$

在 (12) 式右端插入 $Z_{T_n} = Z_{T_n-}\lambda_{T_n}$ 并注意到 $Z_{s-} = Z_s$ a.s. 除开一个 s 零测集成立. 于是

$$\mathbf{E}_0\left[\int_0^t Z_s C_s dN_s\right] = \mathbf{E}_0\left[\int_0^t Z_s C_s \lambda_s ds\right] \tag{13}$$

由 $\mathbf{P}_0$ 下 N 的瞬时强度是 1. □

似然比公式 III

必要性.

步骤 1: 根据泊松过程的鞅表示定理, 存在 $\sigma(N_s : 0 \le s \le t)$-可料过程 H_t 使得 $Z_t = \mathbf{E}_0[d\mathbf{P}/d\mathbf{P}_0 | \sigma(N_s : 0 \le s \le t)]$ 可以表示成

$$Z_t = 1 + \int_0^t H_s(dN_s - ds). \tag{14}$$

步骤 2: 给定 $[0,t]$ 上的有界可料过程 C_s, 注意到 $\mathbf{P}_0$-鞅的性质

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\int_0^t C_s dN_s\right] &= \mathbf{E}_0\left[Z_t \int_0^t C_s dN_s\right] \\ = \mathbf{E}_0\left[\int_0^t (Z_{s-} + H_s) C_s dN_s\right] &= \mathbf{E}\left[\int_0^t (1 + \frac{H_s}{Z_{s-}}) 1(Z_{s-} > 0) C_s ds\right].\end{aligned} \tag{15}$$

步骤 3: 取 $\lambda_t = (1 + H_t/Z_{t-})\, \mathbf{1}(Z_{t-} > 0)$. □

应用

推论 5.1 (布里莫, 1972)

如果存在 $\mathbf{P}_0$ 使得一个自激励过程 N_t 关于 $\mathbf{P}_0$ 是标准泊松过程并且 $\mathbf{P} \ll \mathbf{P}_0$, 那么它是非预期的.

将上面的结果应用于霍克斯过程, 我们可以得出关于标准泊松过程绝对连续的霍克斯过程是零自激励的.

例 5.2

如果 μ 是泊松过程的确定强度函数, ϕ 是自激励强度函数. 那么在首次到达时 t_1 之后强度将变为 $\mu(t) + \phi(t - t_1)$, 在到达时 t_2 强度将跳跃至 $\mu(t) + \phi(t - t_1) + \phi(t - t_2)$, 以此类推. 假设存在 $\mathbf{P}_0$ 使得 N 是标准泊松过程并且 $\mathbf{P} \ll \mathbf{P}_0$, 那么由此推论得出 ϕ 为常数函数.

我们还可以将上述结论进一步推广至维纳过程和马尔可夫过程.

二元维纳过程定义为

- W_t 在局部平方可积增过程 A_t 给定的条件下具有正态分布

$$\mathbf{P}(W_t \le y|A_t) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi A_t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2A_t}\right\} dx$$

- $W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ 在 A_t 给定的条件下相互独立.

如果 A_t 绝对连续且 $A'_t > 0$, 容易看出 $B_t = (A'_t)^{-\frac{1}{2}} W_t$ 是标准布朗运动. 记 $\mathbf{P}_0$ 是 B_t 的概率测度.

维纳可加过程 II

定理 6.1

定义 $R_{t,s} = A_{\min(t,s)}$, ϕ_t 是 $\sigma(W_s : 0 \le s \le t)$-核. 以下五款等价.

1. 存在对称正定核 $K_{t,s}$, $1 \notin \sigma(K)$ $R_{t,s} = \min(t,s) - \int_0^t \int_0^s K_{u,v} du dv$.
2. $R_{t,s} - \min(t,s) \in W^{2,2}$ 且 $c \min(t,s) \le R_{t,s} \le C \min(t,s)$.
3. $R_{t,s} \in W^{2,2}$, $R_{0,s} = 0$ 且 $\lim\limits_{s \to t+0} \partial R_{t,s}/\partial t - \lim\limits_{s \to t-0} \partial R_{t,s}/\partial t = 1$.
4. $\mathbf{P} \ll \mathbf{P}_0$ 且 $d\mathbf{P}/d\mathbf{P}_0|_{\sigma(W_s:0 \le s \le t)} = \exp\left[\int_0^t \phi_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \phi_s^2 ds\right]$.
5. $\mathbf{P} || \mathbf{P}_0$ 且同 *4*.

注

循序可测的局部平方可积过程 ϕ_t 称作是 W_t 的核, 如果 W_t 关于标准布朗运动 B_t 具有表示 $W_t = B_t + \int_0^t \phi_s ds$.

维纳可加过程 III

推论 6.2

设 W_t 是具有局部平方可积过程 A_t 的维纳可加过程. 如果 $\mathbf{P} \ll \mathbf{P}_0$, $A'_t = 1$ 除开一个勒贝格零测集.

推论 6.3

如果存在 $\mathbf{P}_0$ 使得维纳可加过程 W_t 关于 $\mathbf{P}_0$ 是标准布朗运动并且 $\mathbf{P} || \mathbf{P}_0$, 那么它是非预期的.

马尔可夫可加过程 I

第二个例子是马尔可夫过程. 马尔可夫可加过程定义为

- $\mathbf{P}(X_0 = i \mid \mathscr{F}_0) = \nu_{0,i}$.
- X_n 关于 $\mathscr{F}_n$ 具有马尔可夫性质

$$\mathbf{P}(X_{n+m} = i \mid \mathscr{F}_n) = P^{(m)}_{X_n,i}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}, n, m = 1, 2, \ldots$$

由定义可以看出

$$\sigma(P^{(m)} : m \in \mathbf{N}_+) \subseteq \mathscr{F}_0.$$

我们有下面的定理.

定理 6.4

如果存在 $\mathbf{P}_0$ 使得对任意 $j \in S$(有限或可数)$\mathbf{P}_0(X_{n+1} = i \mid X_n = j) = 0$ 都蕴含了 $\mathbf{P}(X_{n+1} = i \mid X_n = j) = 0$, 那么它是非预期的.

马尔可夫可加过程 II

断言 3

$(\mathbf{\Omega}, \mathscr{F}_\infty, \mathbf{P})$ 上的随机过程 X_n 是具有转移概率矩阵 P 的马尔可夫链当且仅当对任意 $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbf{R}^N$, $T = P + I$

$$z_{X_n} - z_{X_0} - \sum_{m=0}^{n-1} (zT)_{X_m} \tag{16}$$

是 $\sigma(X_m : 0 \leq m \leq n)$-鞅并且 $\mathbf{P}v_0^{-1}$ 由初始分布 $v_0 = (v_{0,1}, \ldots, v_{0,N}) \in \mathbf{R}^N$, $v_{0,1} + \cdots + v_{0,N} = 1$ 唯一确定.

必要性.

假设似然比 $d\mathbf{P}/d\mathbf{P}_0$ 已知, 往证存在可料矩阵 P 满足马尔可夫性质.
步骤 1: 根据可料表示定理, 关于 (16) 式定义的马尔可夫鞅 M^z, $\mathbf{P}_0$-鞅 $Z_n = \mathbf{E}_0[d\mathbf{P}/d\mathbf{P}_0|\sigma(X_m : 0 \le m \le n)]$ 具有表示

$$Z_n = 1 + (G \cdot M^z)_n,$$

其中 G_n 是 $\sigma(X_m : 0 \le m \le n)$-可料过程.
步骤 2: 注意到 $Z_n = Z_{n-1} + G_n[z_{X_n} - z_{X_{n-1}} - (zT_0)_{X_n}]$.

$$\mathbf{E}\left[\frac{C_n G_n}{Z_{n-1}} \cdot X^z\right] = \mathbf{E}\left[C_n\left(1 + \frac{(zT_0)_{X_n} G_n}{Z_{n-1}}\right) \cdot A_0^z\right].$$

对任意 $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbf{R}^N$ 都成立.
步骤 3: 取 $T_{i,j} = (Z_{n-1}/G_n + T_{0,i,j})\,T_{0,i,j}$ 满足马尔可夫性质. □

马尔可夫可加过程 IV

问题 1

这一结论关于一般带有速度测度 $m(dx)$, 尺度函数 $s(x)$，消灭测度 $k(dx)$ 三个参数的扩散过程是否也成立?

猜想 1

如果 n 维扩散过程 (A,σ_1) 关于另一组非预期系数 (A,σ_2) 满足一致椭圆条件 $A(t,x)\geq \delta I_{m\times m}$ 和李普希兹条件

$$|\sigma_2(t,x)-\sigma_1(t,x)|\leq \alpha(1+\|x\|^2)$$

那么 (A,σ_1) 是非预期的.

马尔可夫可加过程 V

一组同胚映射 $(f_i)_1^n : D \to \mathbf{R}^n$ 称作是 $x \in D$ 处的 C^k-调和坐标, 如果它们在 x 的某一邻域 U 内满足 $\mathfrak{U} f = 0$, 并且在这组坐标卡 $(f_i)_1^n$ 下任意 U 上的调和函数都是 C^k 的.

猜想 2 (Dynkin, 1963)

如果 D 上的 n 维扩散过程是非预期的, 那么它在点 $x \in D$ 的某一邻域 U 上存在 C^k-调和坐标当且仅当调和测度

$$\mu_y(F) = \mathbf{P}_y\left[X_{\tau(U)} \in F\right], \quad y \in U, F \subseteq \partial D,$$

在边界上的取值非负 $\mu_y(\partial D) > 0$, 其中 $\tau(U)$ 是从 $y \in U$ 点出发离开邻域 U 的初次逃逸时.

谢谢!

Pierre Brémaud, *A martingale approach to point processes*, vol. 345, University of California, Berkeley, 1972.

———, *An extension of Watanabe's theorem of characterization of poisson processes over the positive real half line*, Journal of Applied Probability **12** (1975), 396 – 399.

David R Cox, *Some statistical methods connected with series of events*, Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological) **17** (1955), no. 2, 129–157.

Evgeniĭ Dynkin, *Markov processes I, II*, Springer, 1965.

Alan G Hawkes, *Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes*, Biometrika **58** (1971), no. 1, 83–90.

J. Jacod, *Multivariate point processes: predictable projection, radon-nikodym derivatives, representation of martingales*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw Gebiete **31** (1975), 235–253.

Paul Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, vol. 1, Gauthier-Villars, 1937.

- Calyampudi R. Rao and Herman Rubin, *On a characterization of the Poisson distribution*, Sankhyā Ser. A **26** (1964), 295–298.
- Donald L. Snyder, *Random point processes*, Wiley, 1975.
- Haoming Wang, *Remarks on the Poisson additive process*, 2024, arXiv:2407.21651.
- Shinzo Watanabe, *On discontinuous additive functionals and Lévy measures of a Markov process*, Japanese journal of mathematics **34** (1964), 53–70.